Option mathématiques complémentaires

Document élaboré par les formateurs du groupe académique lycée et destiné aux enseignants.

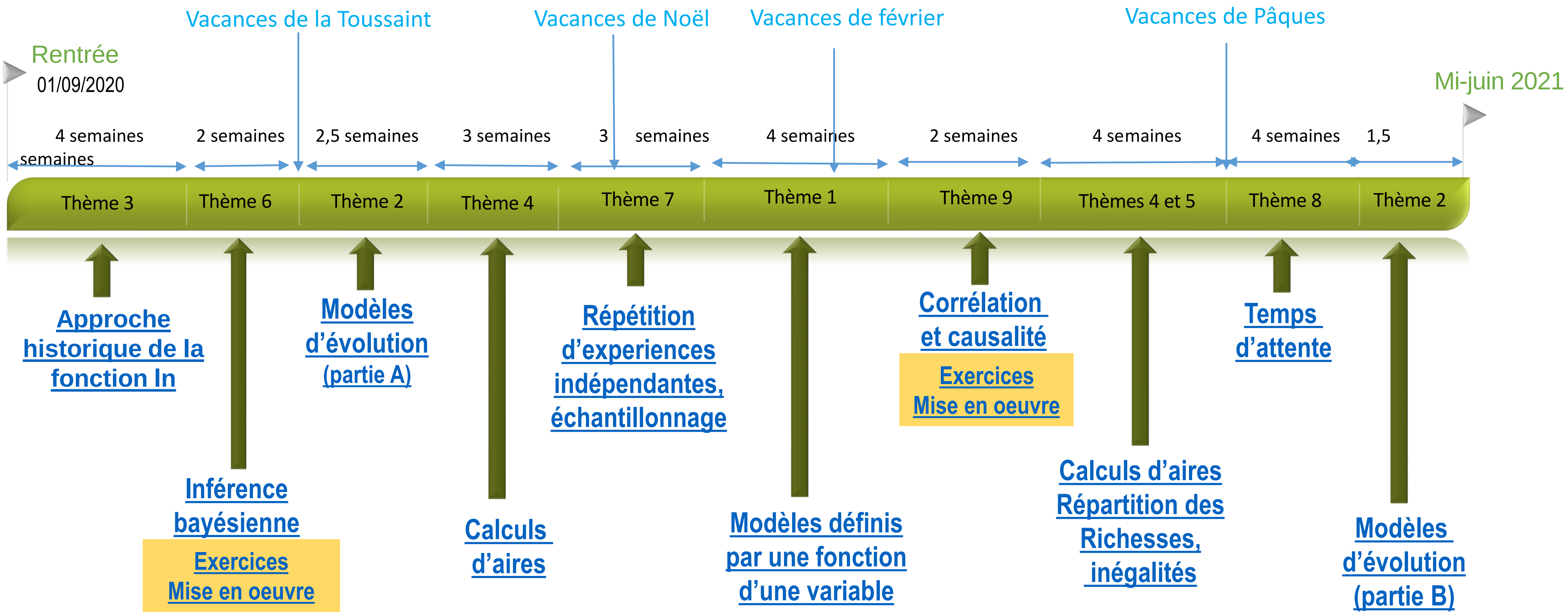
académie Grenoble
RÉGION ACADÉMIQUE AUVERGNE-RHÔNE-ALPES
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Vous trouverez dans les diapositives suivantes deux propositions de progression qui croisent thèmes et contenus, comme le préconise le programme.

Une réflexion sur la mise en œuvre en classe sera conduite lors des JDI qui auront lieu cet automne.

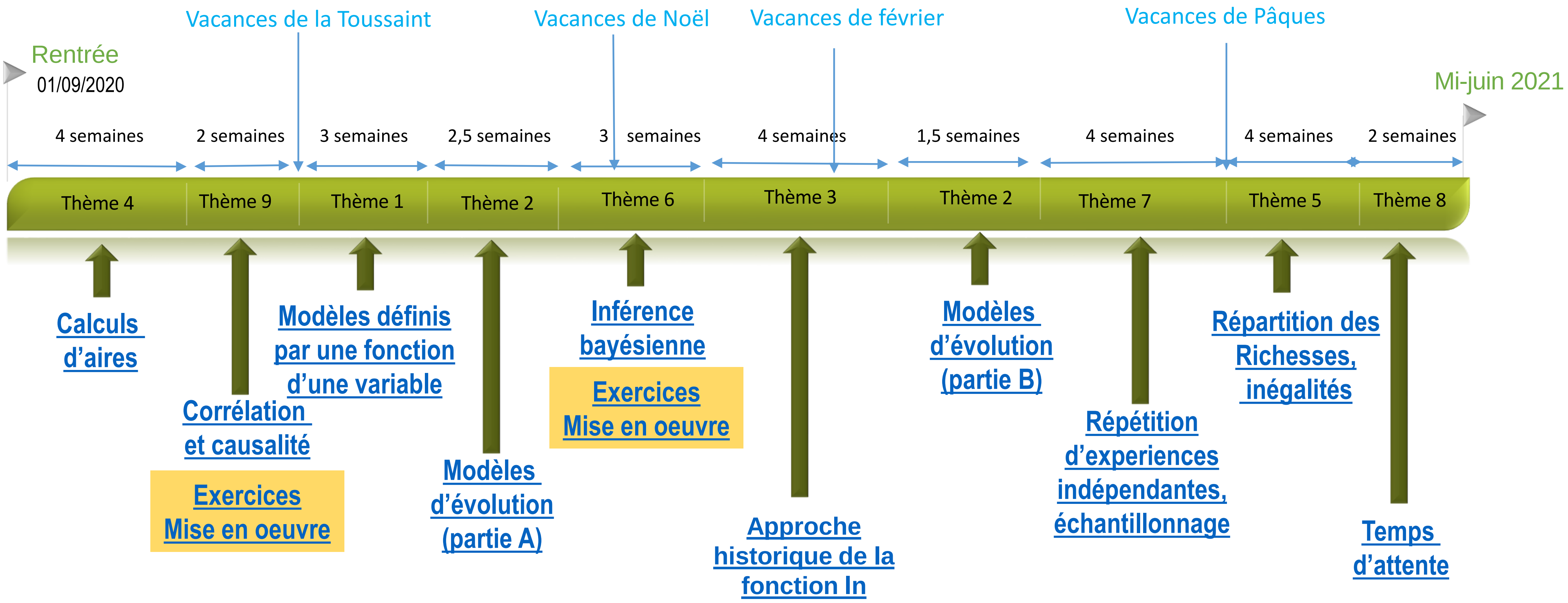
D'ores et déjà, des propositions de mises en œuvre sont présentées pour le thème 6 *(Inférences bayésienne - diapositive 10)* et le thème 9 *(Corrélation et causalité – diapositive 20).*

Exemple de progression n°1



33 semaines (30 semaines effectives ici)

Exemple de progression n°2



33 semaines (30 semaines effectives ici)

Thème 1: *Modèles définis par une fonction d'une variable*

Contenus

- Variation, extremum *(Thèmes 2, 6 et 9)*
- Continuité, TVI *(Thèmes 4, 5 et 6)*
- Convexité *(Thèmes 2 et 5)*
- Limite d'une fonction, asymptotes *(Thèmes 2 et 6)*
- Fonction exponentielle *(Thèmes 2, 3 et 9)*
- Fonction logarithme *(Thèmes 2, 3 et 9)*
- Fonctions dérivées (f(ax+b) ; exp(u) ; ln u ; u^2) *(Thèmes 2 et 3)*
- Statistiques à deux variables *(Thèmes 5 et 9)*

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 2: *Modèles d'évolution*

Contenus

- Variation, extremum *(Thèmes 1, 6 et 9)*
- Convexité *(Thèmes 1 et 5)*
- Equation différentielle $y'=ay+b$
- Limite d'une fonction, asymptotes *(Thèmes 1 et 6)*
- Réciproque d'une fonction *(Thème 3)*
- Fonction exponentielle *(Thèmes 1, 3 et 9)*
- Fonction logarithme *(Thèmes 1, 3 et 9)*
- Fonctions dérivées ($f(ax+b)$; $\exp(u)$; $\ln u$; u^2) *(Thèmes 1 et 3)*
- Limite d'une suite *(Thème 4)*
- Limite d'une somme de termes d'une suite géométrique *(Thème 4)*
- Suites arithmético-géométriques
- Loi géométrique, loi exponentielle (absence de mémoire) *(Thèmes 4 et 8)*

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 3: *Approche historique de la fonction logarithme népérien*

Contenus

- Réciproque d'une fonction *(Thème 2)*
- Fonction exponentielle *(Thèmes 1, 2 et 9)*
- Fonction logarithme *(Thèmes 1, 2 et 9)*
- Fonctions dérivées ($f(ax+b)$; $\exp(u)$; $\ln u$; u^2) *(Thèmes 1 et 2)*
- Calcul intégral *(Thèmes 4 et 5)*

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 4: *Calcul d’aires*

Contenus

- Continuité , TVI *(Thèmes 1, 5 et 6)*
- Primitives *(Thème 5)*
- Calcul intégral *(Thèmes 3 et 5)*
- Limite d'une suite *(Thème 2)*
- Limite d'une somme de termes d'une suite géométrique *(Thème 2)*
- Loi uniforme discrète et continue sur [a ; b] *(Thème 7)*
- Loi géométrique, loi exponentielle (absence de mémoire) *(Thèmes 2 et 8)*

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 5: *Répartition des richesses, inégalités*

Contenus

- Continuité, TVI *(Thèmes 1, 4 et 6)*
- Convexité *(Thèmes 1, et 2)*
- Primitives *(Thème 5)*
- Calcul intégral *(Thèmes 3 et 4)*
- Statistiques à une variable
- Statistiques à deux variables *(Thèmes 1 et 9)*

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 6 : *Inférence bayésienne*

Contenus

- Variation, extremum *(Thèmes 1, 2 et 9)*
- Continuité, TVI *(Thèmes 1, 4 et 5)*
- Limite d'une fonction, asymptotes *(Thèmes 1 et 6)*
- Probabilités conditionnelles

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 6 : Inférence bayésienne
Mise en œuvre

Première séance en classe :
Proposer aux élèves **l'exercice 1** afin de remobiliser les connaissances sur les probabilités conditionnelles

Proposer aux élèves **l'exercice 2** extrait de :

https://sciencetonnante.wordpress.com/2012/10/08/les-probabilites-conditionnelles-bayes-level-1/

Deuxième séance en classe :
Proposer le **problème n°1** ; Utiliser la notion de probabilité conditionnelle pour résoudre un problème du type de celui indiqué dans le programme « De quelle urne vient la boule ? » . Dans le contexte de l'exercice : « A quelle question a t-on répondu oui ? »(Probabilité inverse).

Troisième séance :
Contenus théoriques : Formule de Bayes (Par exemple : apport historique , formule et application)

Quatrième séance :
Proposer un problème relevant du même thème et permettant de mobiliser d'autres contenus, par exemple le **problème n°2** : Test de dépistage d'une maladie
L'objectif est de mobiliser la formule de Bayes dans un contexte médical.
Utilisation des connaissances liées aux probabilités conditionnelles et étude des variations d'une fonction

Séances suivantes : Des problèmes sur le même thème faisant intervenir d'autres notions : fonction, suite, utilisation de Python pour les simulations.
En médecine (Test diagnostique) ou épidémiologie,
En informatique (Filtrage bayésien anti-spam)
En économie

Frise/progression 1

Frise/progression 2

<u>Exercice 1</u> *: Consolider les bases*

Dans un groupe d'adultes âgés de 18 à 65 ans ayant été scolarisés en France, on constate que :

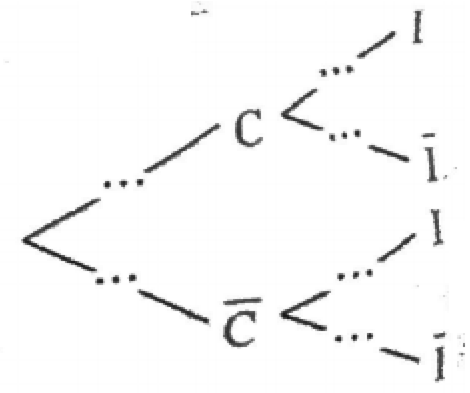
- 82% d'entre eux ont effectué une scolarité complète au collège.
- Parmi les personnes ayant effectué une scolarité complète au collège, 97% ne sont pas en situation d'illettrisme.
- Une personne sur quatre, parmi celles qui ont interrompu leur scolarité avant la fin du collège, est en situation d'illettrisme.

On interroge au hasard une personne de la population étudiée.

On considère les évènements C « la personne a effectué une scolarité complète au collège » et I « la personne est en situation d'illettrisme ».

1. a) Interpréter les trois données numériques de l'énoncé en terme de probabilités simples ou de probabilités conditionnelles.

   b) Compléter l'arbre pondéré ci-contre modélisant la situation.



2. a) Calculer la probabilité que la personne choisie ait effectué une scolarité complète au collège et soit en situation d'illettrisme.

   b) Une enquête de l'INSEE affirme que « 7% de la population adulte âgée de 18 à 65 ans ayant été scolarisée en France est en situation d'illettrisme ». Ce constat est-il valable pour le groupe étudié ? Justifier.

3. Déterminer et interpréter les probabilités $P_{\overline{C}}(\overline{I})$ et $P_{\overline{I}}(\overline{C})$

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Exercice 2:

« Vous venez de passer un test pour le dépistage du cancer. Le médecin vous convoque pour vous annoncer le résultat : mauvaise nouvelle, il est positif ! Pas de chance, alors que ce type de cancer ne touche que 0.1% de la population….

Vous demandez alors au praticien si le test est fiable. Sa réponse est sans appel :

« Si vous avez le cancer, le test sera positif dans 90% des cas ; alors que si vous ne l'avez pas, il sera négatif dans 97% des cas ». L'affaire paraît entendue…

Et pourtant, à votre avis, après le résultat d'un tel test, quelle est la probabilité que vous ayez le cancer ? 90% ? 87% ? Moins que ça ?

Pour répondre à cette question, il va falloir faire un tout petit peu de probabilités…mais ça en vaut la peine

Imaginons que 10 000 personnes viennent passer le test.

1. Représenter la situation par un arbre
2. Donner le pourcentage de sains parmi les testés positifs.
3. Conclure

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Problème n° 1 : *Une question embarrassante !*

Un institut de sondage souhaite poser à un échantillon représentatif de 1000 personnes une question délicate, par exemple « Avez-vous déjà volé dans un magasin ? ». Pour éviter que les sondés n'osent répondre à la question ou qu'ils mentent, l'institut de sondage procède en mettant en œuvre la méthode de « réponse aléatoire ». On demande aux sondés de lancer un dé à 6 faces. S'il obtient un nombre pair il répond à la question Q1, et si c'est un nombre impair à la question Q2 :

- Q1 : « Etes-vous un homme ?»
- Q2 : « Avez-vous déjà volé dans un magasin ? »

Le sondé répond donc par « oui » ou « non » mais le sondeur ne voit pas le dé et ne sait donc pas à quelle question il répond. Pour autant, connaissant la fréquence des hommes dans l'échantillon, il pourra estimer le nombre de « oui » à la question délicate !

On suppose que dans la population sondée, la fréquence des hommes est égale à 0,5. La fréquence de « oui » parmi les réponses sera notée f. On choisit un individu sondé au hasard. On note les événements suivants :

Q1 = « la personne répond à la question Q1 »
Q2 = « la personne répond à la question Q2 »
O = « la personne répond oui à la question tirée au sort ».

1. Quelle est la probabilité que l'on cherche à calculer ? On la notera x par la suite.
2. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation.
3. Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer $P(Q_2 \cap O)$ en fonction de f.
4. En déduire que $x = 2f - \frac{1}{2}$
5. Si le sondeur relève 34 % de oui, qu'en déduira-t-il quant à la probabilité qu'une personne interrogée ait déjà volé dans un magasin ?

Frise/progression 1

Frise/progression 2

<u>Problème n° 2</u> : *Test de dépistage systématique d'une maladie*

On dispose d'un test pour dépister une maladie. Le fabricant du test affirme qu'il est fiable à 99 %, ainsi :

- Lorsqu'un individu est atteint de la maladie, le test est positif dans 99 % des cas
- Lorsqu'un individu n'est pas porteur de la maladie, le test est négatif dans 99 % des cas ;

On choisit au hasard un individu de la population concernée et on lui applique le test.
On note M l'événement : « L'individu est malade » et T l'événement :« le test est positif ».

1. On suppose dans cette question que la probabilité que l'individu soit malade est égale à 0,2.

a) Représenter ces données dans un arbre et calculer $P(T)$.

b) On appelle valeur prédictive du test la probabilité $P_T(M)$. Calculer puis interpréter cette probabilité.

2. On suppose maintenant que la probabilité pour qu'un individu soit malade est égale à x où $x \in [0; 1]$.

a) Exprimer $P(T)$ en fonction de x puis démontrer que $P_T(M) = \frac{99x}{98x+1}$

b) Tracer sur calculatrice la fonction $f(x) = \frac{99x}{98x+1}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

c) Etudier les variations de la fonction f sur $[0; 1]$.

3. Quel inconvénient majeur présenterait l'utilisation de ce test pour dépister une maladie touchant 1 % de la population ?

4. Pour quelles valeurs de x la valeur prédictive du test est-elle supérieure ou égale à 99 % ? Interpréter le résultat.

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Inférence bayésienne et fonction ln

Dans ce problème, les résultats seront arrondis au millième. On estime que la probabilité d'observer une maladie dans une population est égale à 0,1. La maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin. On considère une population de 100 personnes, toutes choisies indépendamment les unes des autres.
On forme, au hasard, 10 groupes de 10 personnes. Au lieu de tester les 100 personnes individuellement, on teste le mélange des prélèvements sanguins d'un groupe de 10.
Si le test est négatif, on considère que les 10 personnes sont saines et on est dispensé de 10 tests individuels. Si le test est positif, une personne au moins du groupe est atteinte de la maladie et il faut alors tester individuellement les 10 personnes du groupe ; dans ce cas, on doit effectuer 11 tests.

1. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades dans un groupe de 10 personnes.

a. Quelle est la loi de Y ?

b. Calculer la probabilité pour que, dans un groupe, on n'observe aucune personne malade.

c. Calculer la probabilité pour que, dans un groupe, on observe au moins une personne malade.

On admettra, dans la suite de l'exercice, que la probabilité d'observer au moins une personne malade dans un groupe est égale à 0,651.

2. On considère la variable aléatoire N égale au nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition d'un échantillon de 100 personnes, et par X la variable aléatoire égale au nombre de groupes pour lesquels le test est positif.

a. Exprimer N en fonction de X.

b. Quelle est la loi de probabilité de X ?

c. Calculer $P(N = 110)$ et $P(N = 90)$.

3. On admet que, si X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, alors, pour tous réels a et b, on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Calculer $E(N)$. Interpréter le résultat.

4. Afin de réduire les coûts, on cherche à optimiser la taille des groupes. On note n la taille des k groupes égaux.
On reste sur une population de taille 100. On a donc $k \times n = 100$.
On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tests positifs dans un groupe de taille n et X_n la variable aléatoire égale au nombre de groupes de taille n pour lequel le test est positif.

a. Montrer que $P(Y_n \geqslant 1) = 1 - 0{,}9^n$.

b. Montrer que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k\,;1 - 0{,}9^n)$.

c. On note N la variable aléatoire égale au nombre de tests à effectuer avec cette répartition en k groupes de taille n.
Démontrer que $N = nX + k$.

d. En déduire que :

$$E(N) = k + kn\left(1 - 0{,}9^n\right) = 100\left(1 - 0{,}9^n + \frac{1}{n}\right)$$

e. On admet que, pour tout réel, $0{,}9^x = e^{x\ln(0{,}9)}$.
On pose $f(x) = 100\left(1 - e^{x\ln(0{,}9)} + \frac{1}{x}\right)$.
À l'aide de la calculatrice, tracer les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

f. En déduire la taille optimale n et le nombre de groupes k à constituer.

[Hachette Education –
Option mathématiques complémentaires –
Collection Barbazo 2020]

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Inférence bayésienne et suites

[Hachette Education – Declic Mathématiques complémentaires 2020]

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être dans l'un des trois états suivants : **état S** susceptible d'être atteint par le virus ; **état I** infecté par le virus ; **état R** rétabli et ne pouvant plus être infecté par le virus.
Un individu est dans l'état R lorsqu'il a été vacciné ou lorsqu'il a guéri après avoir été infecté par le virus.
Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :
① Parmi les individus à l'état S une semaine donnée, 85 % restent à cet état la semaine suivante, 5 % deviennent malades et 10 % sont rétablis.
② Parmi les individus infectés (à l'état I) une semaine donnée, 65 % restent malades et 35 % sont rétablis.
③ Tout individu rétabli une semaine donnée l'est également la semaine suivante.
On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :
S_n : « l'individu est à l'état S en semaine n », I_n : « l'individu est à l'état I en semaine n » et R_n : « l'individu est à l'état R en semaine n ». En semaine 0, tous les individus sont à l'état S, ainsi $P(S_0)=1$, $P(I_0)=P(R_0)=0$. On note, pour tout entier naturel n, $u_n=P(S_n)$, $v_n=P(I_n)$ et $w_n=P(R_n)$.

Partie A Évolution au cours des deux premières semaines

1. Construire un arbre de probabilité modélisant la situation pour les deux premières semaines.
2. Montrer que $P(R_2)=0{,}2025$.
3. Calculer et interpréter $P_{R_2}(I_1)$. Arrondir au millième.

Partie B Évolution sur le long terme

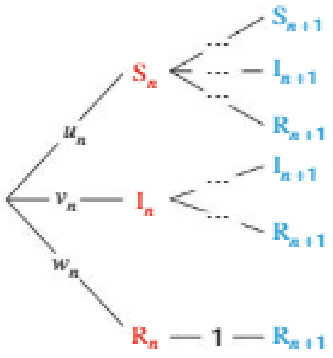
1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n+v_n+w_n=1$$

2. a. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1}=0{,}85u_n$$

et $v_{n+1}=0{,}65v_n+0{,}05u_n$



3. a. À l'aide d'un tableur, calculer et représenter les termes de ces trois suites pour les 20 premières semaines.
b. On admet que les termes de la suite v augmentent puis diminuent à partir d'un certain rang N appelé « pic épidémique ». En utilisant la feuille de tableur précédente, déterminer le pic épidémique.

Info
Le pic épidémique est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

4. a. Quelle est la nature de la suite u ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
On admettra dans la suite que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n=0{,}25(0{,}85^n-0{,}65^n)$.
b. Calculer les limites des suites u, v et w.
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 7: *Répétitions d'experiences indépendantes, échantillonnages.*

Contenus

- Loi binomiale
- Loi uniforme discrète et continue sur [a ; b] *(Thème 7)*

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 8: *Temps d'attente*

Contenus

- Loi géométrique, loi exponentielle (absence de mémoire) *(Thèmes 2 et 4)*

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 9: *Corrélation et causalité*

Contenus

- Variation, extremum *(Thèmes 1, 2 et 6)*
- Fonction exponentielle *(Thèmes 1, 2 et 3)*
- Fonction logarithme *(Thèmes 1, 2 et 3)*
- Statistiques à deux variables *(Thèmes 1 et 5)*

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Thème 9 : Corrélation et causalité
Mise en œuvre

Avant la première séance en classe, proposer une vidéo à visionner à la maison :
La statistique expliquée à mon chat : “Chocolat, corrélation et moustache de chat”:
https://www.youtube.com/watch?v=aOX0pIwBCvw

- Première séance en classe:

Activité 2 (diapo 22) : cet article est dans la continuité de la vidéo “Chocolat, corrélation et moustache de chat” ; le diagramme en bâtons de la vidéo est compréhensible par un élève seul ; avec cet article, on introduit la représentation par nuage de points, moins habituelle pour les élèves.

- Avant la deuxième séance en classe, en travail hors la classe :

Activité 1 : on demande aux élèves de préparer un petit oral de deux minutes portant sur deux grandeurs (étudiées sur le site) et expliquant l’éventuelle corrélation entre elles (regard critique).

- Deuxième séance en classe :

Petits oraux individuels
En prenant appui sur l’exercice (diapo 22), on introduit les connaissances théoriques sur les statistiques à deux variables et la notion de corrélation. Phase d’institutionnalisation.

- Troisième séance en classe :

Proposer un problème sur le même thème permettant de mobiliser d’autres notions, par exemple le problème sur une maladie dégénérative de l’œil (diapo 23).

Séances suivantes, à long terme: étudier régulièrement des exercices portant sur ce thème: cf. progression annuelle.

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Introductions à l’oral

activité 1
https://www.lemonde.fr/les-decodeurs/article/2019/01/02/correlation-ou-causalite-brillez-en-societe-avec-notre-generateuraleatoire-de-comparaisons-absurdes_5404286_4355770.html

activité 2
https://www.lemonde.fr/sciences/video/2019/09/12/correlation-et-causalite-peut-on-decrocher-un-prix-nobel-en-mangeantdu-chocolat_5509656_1650684.html

“Les données sont formelles : les pays les plus récompensés par l’académie Nobel sont aussi les plus gros consommateurs de chocolat ! Franz H. Messerli, éminent cardiologue suisse, en a donc déduit que manger du chocolat permettait d’obtenir plus de prix Nobel. En apparence, la démonstration semble logique. Mais en apparence seulement, car le professeur Messerli a allègrement sauté le fossé qui sépare corrélation et causalité. Cette erreur, nous sommes tous tentés de la commettre lorsque nous observons des courbes qui se suivent ou des cartes qui se ressemblent.
Pourtant, la différence est fondamentale. Deux événements sont corrélés lorsqu’ils varient plus ou moins proportionnellement. Mais le terme causalité est employé lorsque l’un de ces événements est la cause de l’autre.
Dans le cas du chocolat et des prix Nobel, rien ne permettait à Franz Messerli de déterminer que la consommation de chocolat était bel et bien la cause de l’obtention de prix Nobel.”
(document exploitable en faisant le lien entre le graphique et le texte: Chocolate_Noble.pdf)

exercice
On a mesuré la résistance thermique d’un isolant de doublage de murs. Les mesures effectuées pour plusieurs épaisseurs de l’isolant ont donné les résultats suivants:

épaisseur x de l’isolant (mm)	30	40	50	60	70	80	90	100
résistance thermique y $(m^2.°C.W^{-1})$	1,96	2,25	2,65	3	3,30	3,70	4,02	4,38

1. Représenter le nuage de points de coordonnées (x; y). Un ajustement affine parait-il opportun ?
2. Déterminer le point moyen G1 des quatre premières données, le point moyen G2 des quatre dernières données, et une équation de la droite (G1G2).
3. A l’aide de l’équation ainsi obtenue en 2. d’une part et de la méthode des moindres carrés d’autre part, prévoir quelle serait la résistance avec une épaisseur d’isolant de 120 mm, puis quelle épaisseur d’isolant il faudrait pour obtenir une résistance thermique de 3,5 $m^2.°C.W^{-1}$.
Comparer les résultats.

Frise/progression 1

Frise/progression 2

Corrélation et causalité, limite de fonctions et fonction logarithme népérien

[Hachette Education – Option mathématiques complémentaires – Collection Barbazo 2020]

Afin de freiner l'évolution d'une maladie dégénérative de l'œil, on injecte par intraveineuse un médicament qui permet de mieux vasculariser la rétine et son pourtour.
À l'instant $t = 0$, on injecte une dose de 1,8 mg de médicament appelée dose de charge. Une pompe injecte ensuite le médicament de manière continue. On admet que la quantité de médicament présente dans le sang évolue au cours du temps et que, grâce à l'élimination rénale, elle ne peut dépasser une valeur limite ℓ.
Dans la pratique, on dit que l'état stationnaire d'un médicament est atteint dès que la quantité de ce médicament dans le sang s'approche à moins de 1 mg de cette valeur limite ℓ.
On veut estimer l'état stationnaire du médicament considéré et envisager à partir de quand il sera atteint.
On effectue 7 mesures régulières pendant 24 heures et on consigne les résultats dans le tableau suivant.
On note t la variable temps (en heure) qui prend les valeurs t_i et q la variable quantité de médicament (en mg) qui prend les valeurs q_i.

t_i	0	4	8	12	16	20	24
q_i	1,8	9,5	15,5	20,2	23,7	26,8	28,7

1. Tracer le nuage de points de la série statistique de deux variables t et q. Expliquer pourquoi il semble qu'on ne puisse pas envisager un ajustement affine.

2. Calculer les coordonnées du point moyen.

3. On envisage un changement de variable pour déterminer une expression de q en fonction de t.

a. On pose $y_i = \ln(36 - q_i)$.
Déterminer les valeurs de la variable y arrondies à 10^{-3} près.

b. Calculer la droite de régression de y en t.

4. En utilisant la droite de régression, exprimer q en fonction de y puis q en fonction de t.

5. Déterminer la limite de la variable q lorsque t tend vers $+\infty$.

6. Démontrer que, selon cet ajustement, l'état stationnaire sera atteint en moins de quatre jours.

Frise/progression 1

Frise/progression 2