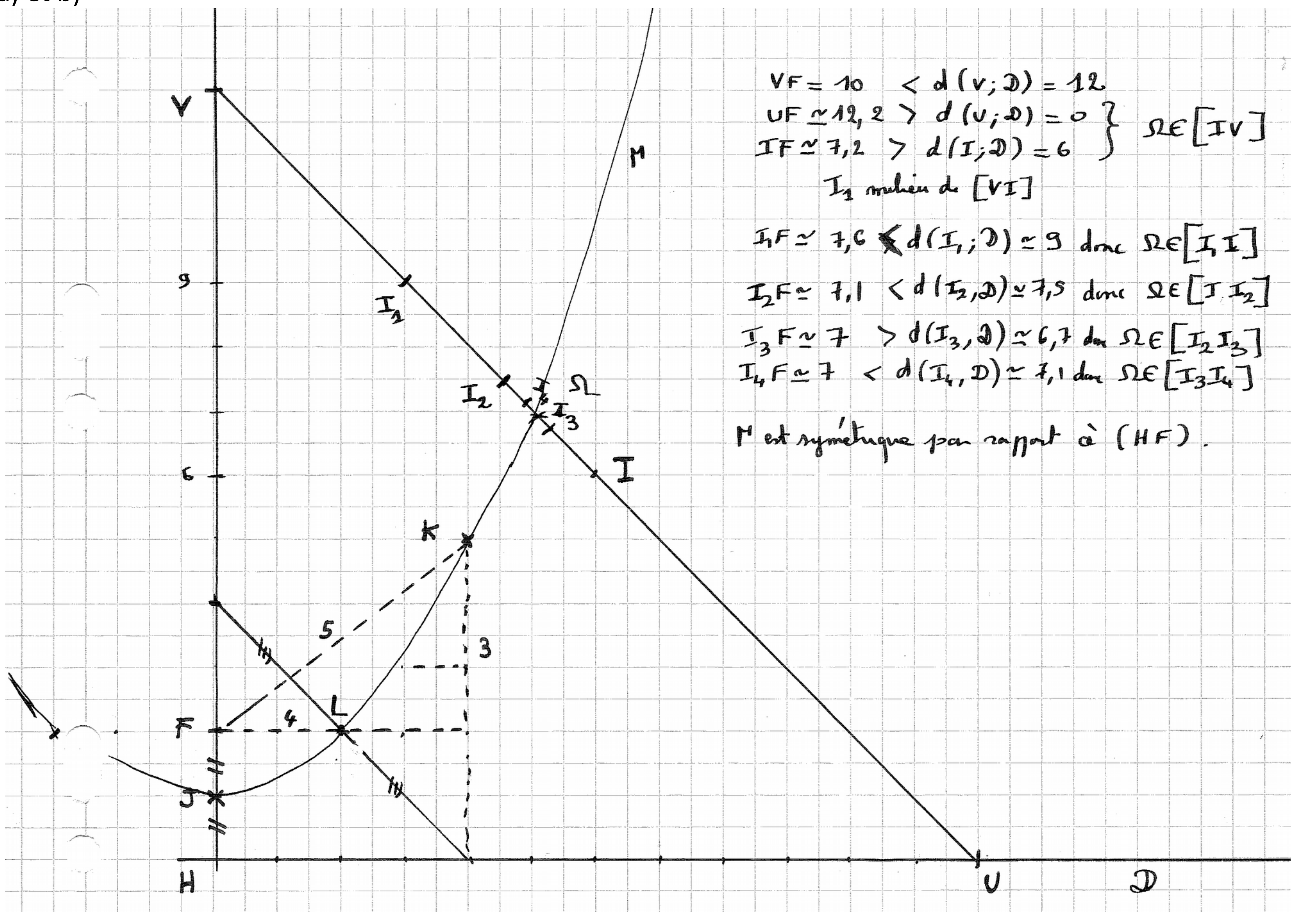
La parabole du jardinier

Éléments de correction

Partie A

1. a) et b)



3)

Remarque : IF < d(I ; d) équivaut à $(\mathrm{XI}-0)^2+(\mathrm{YI}-1)^2<(\mathrm{YI}+1)^2$ équivaut à $\mathrm{XI}^2-2\,\mathrm{YI}+1<0$

XU, YU, XV, YV, XI, YI sont des réels
P est un entier
Lire XU, YV
Lire P
YU prend la valeur 0
XV prend la valeur 0
XI prend la valeur $\frac{\mathrm{XU}}{2}$
YI prend la valeur $\frac{\mathrm{YV}}{2}$
Tant que Abs($\mathrm{XI}^2-2\,\mathrm{YI}+1$)>$10^{-P}$
  Si $\mathrm{XI}^2-2\,\mathrm{YI}+1<0$ alors
    XI prend la valeur XU
    YI prend la valeur YU
  sinon
    XI prend la valeur XV
    YI prend la valeur YV
  fin si
Fin Tant que

```
NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP
PROGRAM:PARABOLE
:Prompt B
:Prompt C
:Prompt P
:0→A
:0→D
:1→M:0→N
:While abs(M²-2*N+1)>10^-P
■
:(A+C)/2→M
```

```
NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP
PROGRAM:PARABOLE
:(B+D)/2→N
:If M²-2*N+1<0
:Then
:M→A:N→B
:Else
:M→C:N→D
:End
:End
:Disp A:Disp B
```

```
NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP
B=?12
C=?12
P=?5
                3.898979187
                8.101020813
                       Fait
0.5*3.898979187²+0.5
                 8.10101935
```

Remarque : l'algorithme fournit une bonne approximation des coordonnées de Ω qui sont $x_\Omega=-1+2\sqrt{6}$ et $y_\Omega=0{,}5\,x_\Omega^2+0{,}5$ avec $x_\Omega\approx\{3{,}89897948557\}$

Partie B

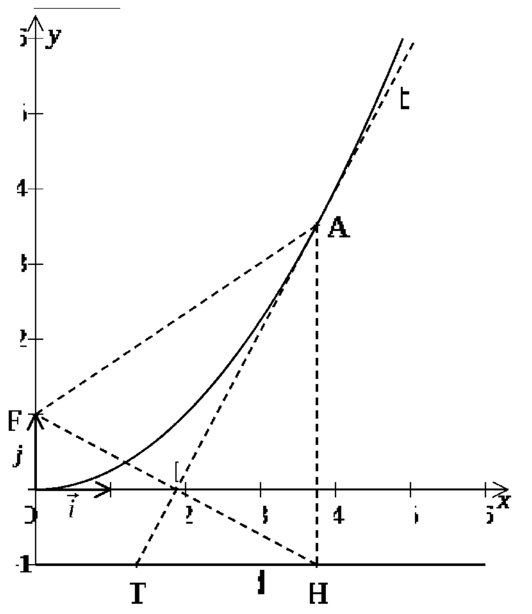
1) $\mathrm{M}(3\,;y)\ \mathrm{F}(0\,;1)$

$\mathrm{M}(3\,;y)\in\Gamma \Leftrightarrow 3^2+(y-1)^2=y^2 \Leftrightarrow y=5.$

2) $\mathrm{M}(x\,;y)\in\Gamma \Leftrightarrow$ FM² = d(M ; d)²

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=(y+1)^2$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x^2.$



3) Le point H a pour coordonnées $(a\,;-1)$ et $\mathrm{F}(0\,;1)$.

Donc le milieu I de [FH] a pour coordonnées $\left(\dfrac{a}{2}\,;0\right)$.

On note $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$. On a alors $f'(x)=\dfrac{x}{2}$.

L'équation de t est alors $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

donc $y=\dfrac{a}{2}(x-a)+\dfrac{a^2}{4}$ donc $y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}$.

En remplaçant *x* par $\dfrac{a}{2}$ on trouve $y=0$.

Ce qui prouve que I appartient à t.

3) Le triangle FAH est isocèle car A appartient à Γ
donc FA = HA.
La médiane [TA] est aussi bissectrice d'où $\widehat{\mathrm{FAT}}=\widehat{\mathrm{TAH}}$.

Partie C

1) On se place dans un repère tel que $\mathrm{A}(0\,;a)$, $\mathrm{M}(x\,;y)$ et $\mathrm{H}(x\,;0)$.

On a $\mathrm{AM}+\mathrm{MH}=l$ donc $\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}+y=l$ d'où $x^2+y^2-2ay+a^2=l^2-2yl+y^2$

Ce qui équivaut à $2(l-a)y=-x^2+l^2-a^2$ ou encore $y=\dfrac{-x^2}{2(l-a)}+\dfrac{l+a}{2}$.

Le point M décrit bien une partie de parabole.

2) On doit avoir $\dfrac{l+a}{2}=2{,}5$ donc $l+a=5$ (*).

D'autre part les solutions de l'équation $\dfrac{-x^2}{2(l-a)}+\dfrac{l+a}{2}=0$ soit $\dfrac{x^2}{2(l-a)}=\dfrac{l+a}{2}$ doivent être 1 et –1.

Donc $\dfrac{1}{2(l-a)}=\dfrac{5}{2}$ ce qui équivaut à $l-a=\dfrac{1}{5}$ (**).

En combinant (*) et (**), on obtient aisément *l* = 2,6 mètres et *a* = 2,4 mètres.