LA TROMPETTE

Partie A : le volume de la trompette

1. **a.** rayon du 1er cylindre : $\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$ rayon du 2ème cylindre : $\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{1}{9}$

hauteur du 1er cylindre : $\frac{1}{6}$ hauteur du 2ème cylindre : $\frac{1}{6}$

b. Cas $n=6$: Volume du 1er cylindre : $\pi\times\left(\frac{1}{36}\right)^2\times\frac{1}{6}$; Volume du 2ème cylindre : $\pi\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\times\frac{1}{6}$

Cas général, pour n quelconque :

Volume du 1er cylindre : $\pi\times\left(\frac{1}{n^2}\right)^2\times\frac{1}{n}=\frac{\pi}{n^5}$; Volume du 2ème cylindre : $\pi\times\left(\frac{2^2}{n^2}\right)^2\times\frac{1}{n}=\frac{\pi\times 2^4}{n^5}$

2.

```
Saisir N
V prend la valeur 0
Pour k allant de 1 à N faire
      V prend la valeur V + π × k^4 / N^5
FinPour
Afficher V
```

3. $V_n=\frac{\pi}{n^5}+\frac{\pi\times 2^4}{n^5}+\frac{\pi\times 3^4}{n^5}+\ldots+\frac{\pi\times(n-1)^4}{n^5}+\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n^5}\left(1+2^4+\ldots+n^4\right)$.

4. En programmant l'algorithme ou en utilisant la formule ci-dessus et les listes dans la calculatrice : $\approx 0{,}64$.

Partie B : des calculs de sommes

1. Justification de $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$: imaginons une figure comme celle donnée, constituée de $n\times(n+1)$ carrés.

Une autre façon de compter les carrés est : $2\times(1+2+\ldots+n)$. D'où l'égalité.

$2.a.\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2-(n+1)^2$

b. $C_{n+1}=0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+2\times(1+2+\ldots+(n-1)+n)+(n+1)$ $C_{n+1}=C_n+2S_n+(n+1)$

c. $C_{n+1}=C_{n+1}-n^2-2n-1+2S_n+(n+1)$.

3. **a.** $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$.

$b.\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-(n+1)^3;\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=0}^{n}k^3+3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+(n+1)-(n+1)^3$

$3\sum_{k=0}^{n}k^2=(n+1)^3-(n+1)-3\sum_{k=0}^{n}k\,;3C_n=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2};$

$C_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $V_n = \frac{\pi}{n^5}\left(\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n\right)$;

$V_n = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{3n^2} - \frac{\pi}{30n^4}$; $V_{160} = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2\times160} + \frac{\pi}{3\times160^2} - \frac{\pi}{30\times160^4}$