Chocolat - corrigé

Karim a une tablette de chocolat, avec m carrés dans un sens et n dans l'autre, donc $m \times n$ carrés en tout.
Pour préparer un gâteau, il veut découper sa tablette en petits carrés de taille 1×1.
Une découpe consiste à prendre un morceau, et à le couper en deux.
Par exemple, si on a un morceau de 2×3, on peut le couper pour obtenir deux morceaux de taille 1×3, ou bien un morceau de taille 2×2 et un de taille 1×2. Ensuite on peut redécouper chacun de ces morceaux.

Partie 1.

1. Combien de découpes sont nécessaires si la tablette est de taille 2×2?
   et si elle est de taille 2×3? de taille 2×4?

Pour 2×2, il faut 3 découpes : une pour faire deux blocs 2×1, et une pour casser chacun de ces deux blocs.
Pour 2×3, il en faut 5: par exemple une pour couper en deux blocs 1×3, et 2 par bloc restant.
Mais tout autre ordre de découpe donne le même nombre 5 (on ne demande pas de le prouver).
Et pour 2×4, il en faut 7 : par exemple une première découpe pour obtenir deux blocs de taille 2×2 qui nécessitent à leur tour chacun trois découpes. On constate ici aussi que toute autre méthode conduit à 7 découpes au total.

2. Soit p un entier. Combien de morceaux y a-t-il après p découpes?
   En déduire que, pour tous m et n, il faut exactement $mn-1$ découpes.

Après p découpes, on obtient $p+1$ blocs. En effet, il y a un bloc au départ et chaque découpe crée un bloc de plus.
Donc pour passer de 1 bloc à $m \times n$ blocs, il faut $mn-1$ découpes.

Partie 2.

Maintenant Karim utilise un couteau qui lui permet de couper plusieurs morceaux à la fois en les réalignant.
Par exemple si la tablette est de taille 1×4, il peut d'abord couper deux morceaux de 1×2, puis mettre ces morceaux l'un par-dessus l'autre pour couper les deux morceaux restants de taille 1×2 ensemble. Il suffit donc au total de deux coupes dans cet exemple, au lieu de trois avant.

1. Combien de coupes suffisent pour couper une tablette
   a) de taille 1×8? B) de taille 1×16?

Pour 1×8, une découpe au milieu permet d'avoir deux blocs 1×4. Ensuite on peut mettre les blocs l'un par dessus l'autre, et avec une seule découpe au milieu obtenir quatre blocs 1×2, puis en les réalignant tous, et en coupant au milieu, on a a obtenu huit blocs 1×1. Il a donc fallu trois découpes.
Pour 1×16, on se ramène au cas précédent en une découpe, au total quatre découpes suffisent.

2. Montrer que pour couper une tablette de taille 1×2^k, il suffit de k découpes.

En une découpe, on crée deux blocs de taille $2 \times 2^{k-1}$.
On peut ensuite les aligner, et les traiter ensemble. On montre ensuite de proche en proche qu'il suffit de k découpes.

3. Montrer que réciproquement, pour couper une tablette de taille 1×2^k, un minimum de k découpes est nécessaire.

Quand on coupe une tablette en deux, l'un des deux blocs fait au moins la moitié de la longueur du bloc de départ.
Donc après une coupe, il reste au moins un bloc de longueur supérieure ou égale à 2^{k-1}.
De même après deux découpes, il reste au moins un bloc de longueur supérieure ou égale à 2^{k-2}.
De proche en proche, on voit qu'après $k-1$ découpes, il reste au moins un bloc de longueur supérieure ou égale à $2^{k-(k-1)}=2$. Il en résulte qu'après $k-1$ découpes, on ne peut avoir fini, il faut donc au moins k découpes.

4. Quelle est la meilleure stratégie pour couper une tablette de taille $1 \times n$?

Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel k tel que $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$ (la notion de limite n'étant probablement pas encore connue à ce moment de l'année, ceci pourra être admis).
La question 5 montre qu'il faut alors au moins $k+1$ découpes.

D'autre part, en ajoutant $2^{k+1}-n$ petits carrés imaginaires à la tablette, on peut la traiter comme une tablette $1 \times 2^{k+1}$, et donc la couper en $k+1$ découpes.

Par conséquent, la stratégie consistant à se ramener en une découpe à une tablette de taille 1×2^k et une tablette de taille $1\times\left(n-2^k\right)$ que l'on superposera, nécessite exactement $k+1$ découpes, elle est optimale.

5. Quelle est la meilleure stratégie pour couper une tablette de taille $2\times n$?

Il suffit d'une découpe pour se ramener à la question précédente.
Avec les mêmes notations, il suffit alors au total de $k+2$ découpes.
Pour montrer que ces coupes sont nécessaires, on peut procéder comme à la question5, en regardant le nombre de petits carrés dans le bloc en contenant le plus.