Second degré

Exercice 1 : Poids astronaute '1èreS _ T.S)

Le poids diminue avec l'altitude.

Ainsi, un astronaute pèse 60kg sur la Terre, son poids (en kg) à l'altitude x (en km) au-dessus du niveau de la mer est donné par :

$$P{=}60{\times}9{,}8{\times}64006400{+}xP = 60 \times 9{,}8 \times \left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2$$

A quelle altitude l'astronaute pèsera-t-il moins de 2,5 kg ?

Exercice 2 : Longueur rectangle (1ère)

Un rectangle a un périmètre de 48 m et une aire de 135 m².

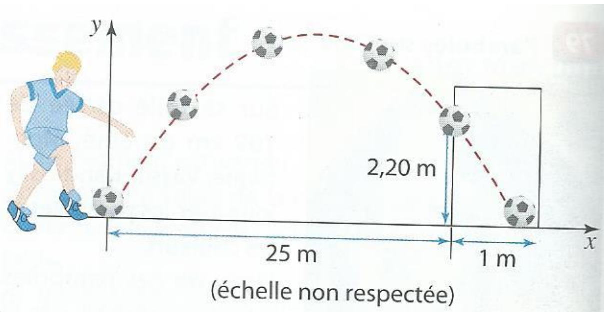
Déterminer les mesures de ses côtés.

Exercice 3 : Tir au but (1ère)

Un joueur situé à 25m du but adverse tente un tir et parvient à marquer.

Son ballon a franchi la ligne de but à une hauteur de 2,20m passant ainsi tout près de la barre transversale, puis a ainsi atteint le sol à 1m derrière la ligne de but.

Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole, quelle hauteur maximale le ballon a-t-il atteinte ?

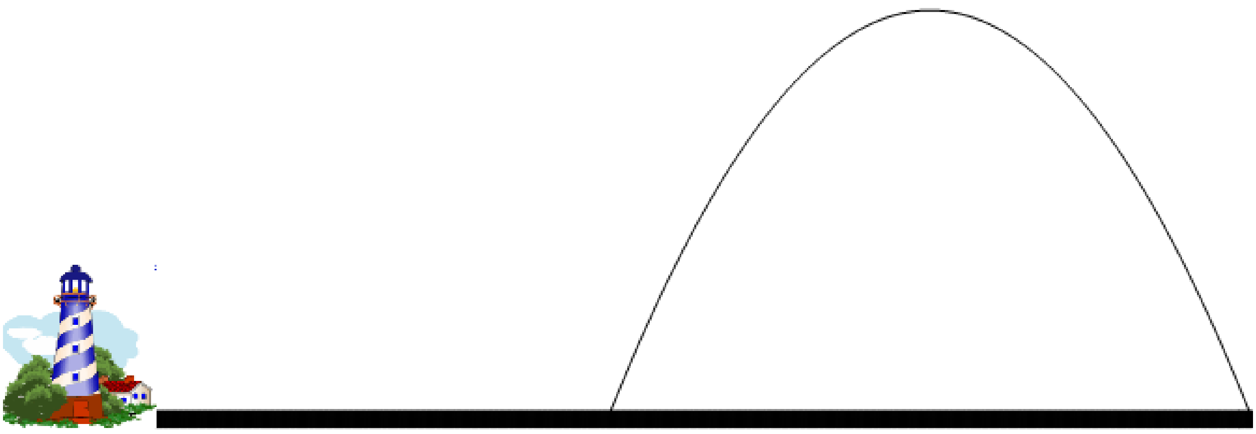


Exercice 4 : Rayon de lumière émanant d'un phare (1ère S _ T.S)

Un phare de hauteur 20m est situé à 700m du pied d'une colline.

La colline culmine à 500m, sa base mesure 1000m, et on suppose qu' elle a une forme parabolique.

Quelle est l'altitude du point de la colline le plus élevé que peut éclairer le phare ?



Eléments de correction : Second degré

Exercice 1 : Poids astronaute

- **Méthode 1 :** Résoudre $P = 60 \times 9{,}8 \times \left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2 < 2{,}5$ par le tableur
- **Méthode 2 :** Trouver les racines de $T(x) = 60 \times 9{,}8 \times \left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2$-2,5 et dresser le tableau de signes
- **Méthode 3 :** programmation avec la boucle « Tant Que $60 \times 9{,}8 \times \left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2$>2,5 faire… »

Exercice 2 : Longueur rectangle

- **Méthode 1 :** $\begin{cases} x + y = 48 \\ x \times y = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 - y \\ (48 - y) \times y = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 - y \\ -y^2 + 48y - 135 = 0 \end{cases}$
- **Méthode 2 :** Tableur

	A	B	C
1	x	y=48-x	aire=135
2	1	47	47
3	2	46	92
4	3	45	135
5	4	44	176
6	5	43	215
7	6	42	252

Exercice 3 : Tir au but

- **Méthode 1 :** $\begin{cases} f(0) = c = 0 \\ f(25) = 625a + 25b = 2{,}20 \\ f(26) = 676a + 26b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = -0{,}088x^2 + 2{,}288x = 0{,}088x(-x + 26)$

  Coordonnées du sommet d'une parabole $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$; $S(13; 14{,}872)$.
- **Méthode 2 :** Résoudre le système à l'aide d'un produit matriciel AX=B avec $A = \begin{pmatrix} 625 & 25 \\ 676 & 26 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Méthode 3 :** Mettre f(x) sous forme canonique : $f(x) = -0{,}088(x - 13)^2 + 14{,}872$

  Et lire les coordonnées du sommet de la parabole.

Exercice 4 : Rayon de lumière émanant d'un phare

- **Méthode 1 :**

- choisir un repère et déterminer l'équation de la parabole dans ce repère.
- déterminer l'équation de la droite du faisceau lumineux du phare avec comme paramètre m, le coefficient directeur de la droite).
- déterminer m pour que la droite du faisceau lumineux du phare et la parabole n'ait qu'un point commun.
=> on obtient une équation du 2nd degré avec comme paramètre m, on veut donc que le discriminant soit nul.
- déterminer l'ordonnée du point cherché.

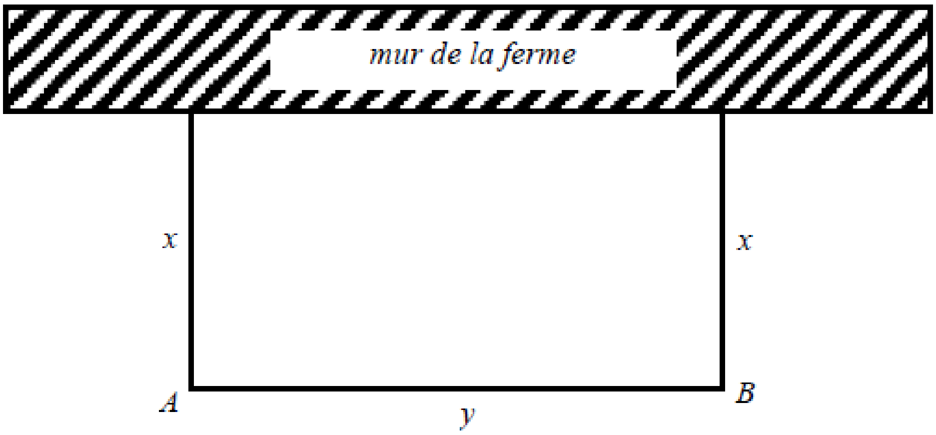
- **Méthode 2 :**

- choisir un repère et déterminer l'équation de la parabole dans ce repère.
- déterminer l'équation d'une tangente à cette parabole en un point quelconque d' abscisse a.
- déterminer a pour que cette tangente passe par le point d' où est émis le faisceau lumineux.
- déterminer l'ordonnée du point cherché.

Dérivation

Exercice 1 : Aire minimale

Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m2.
Où doit -on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?



Exercice 2 : Bénéfice et coût moyen

La production française de caviar représente plus de 600 grammes chaque seconde, soit 20 tonnes de caviar par an, un chiffre qui fait de la France le 2ème producteur mondial derrière l'Italie.

L'entreprise « Caviar de France » décide de fabriquer et de commercialiser son produit. Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes.

- Le coût, en milliers d'euros, d'une production de x tonnes est donné par : $=x3-30x2+300x$.
- En économie, on appelle coût moyen (et on note C_M) le coût de fabrication d'une tonne de produit lorsque x tonnes sont produites. On a donc $C(x)=C(x)x$.
- Après une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son caviar 84 000€ la tonne.

La valeur du bénéfice maximale est-elle la même que la valeur qui minimise le coût moyen ?

Eléments de correction : Dérivation

Exercice 1 : Aire minimale

- **Méthode 1 :** déterminer y en fonction de x et dérivée la fonction
  Aire du poulailler : A=$L \times l = x \times y = 392$ m^2, donc $y = \frac{392}{x}$.
  Longueur $\ell(x)$ du grillage : $l(x) = 2x + y = 2x + \frac{39}{x} = \frac{2x^2+392}{x}$

  $l'(x) = \frac{2x^2-392}{x^2} = \frac{2(x-14)(x+14)}{x^2}$; Longueur minimale : x=14 ; y = $\frac{392}{14} = 28$ et ***l(14)=56 m***

- **Méthode 2 :** Résolution graphique (Lire les coordonnées du minimum sur la courbe).

Exercice 2 : Bénéfice et coût moyen

- **Méthode 1 :** par le calcul de dérivées
  Le coût moyen minimal est atteint pour x=15 tonnes et égal à 75 milliers d'euros.

  $$Bx=-x3+30x$$
  $$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 216x$$

  Lorsque la production de l'entreprise est environ égale à 15,292 tonnes, le bénéfice est maximal, ce qui correspond pratiquement à la valeur de x qui minimise le coût moyen.

- **Méthode 2 :** résolution graphique (Géogébra par exemple)

Suites

Exercice 1 : Prévision effectif

En 2012, une école de commerce compte 600 étudiants scolarisés.

Les effectifs progressent de 3% par an.

Déterminer les effectifs prévus en 2020 si l'évolution se poursuit de la même façon.

Exercice 2 : Comparaison de suites géométriques

Dans un village Isérois A, la population en 2012 est de 1200 hab. et augmente de 4% par an.

Dans un village Savoyard B, la population en 2012 est de 800 hab. et augmente de 6% par an.

Déterminer à partir de quelle année la population de B dépasse la population de A.

Exercice 3 : Coktail

Si dans une bouteille de 2 litres, on verse :

un litre d'eau, puis $\frac{1}{2}$ litre, puis $\frac{1}{4}$, puis, … , et pour finir $\frac{1}{64}$ de litre d'eau,

alors la bouteille déborde.

Cette affirmation est-elle vraie ?

Eléments de correction : Suites

Exercice 1 : Prévision effectif

- **Méthode 1 :** Suite géométrique $u_8 = 600 \times 1{,}03^8$

- **Méthode 2 :** Tableur

	A	B	C
1	n	année	un
2	0	2012	600
3	1	2013	618
4	2	2014	636,54
5	3	2015	655,6362
6	4	2016	675,305286
7	5	2017	695,564445
8	6	2018	716,431378
9	7	2019	737,924319
10	8	2020	760,062049

Exercice 2 : Comparaison de suites géométriques

- **Méthode 1 :** Tableur calculatrice : comparer $Y1 = \ 1200 * 1{,}04\hat{}x$ et $Y2 = \ 800 * 1{,}06\hat{}x$

- **Méthode 2 :** Tableur avec condition

SI $(1200 * 1{,}04\hat{}x < 800 * 1{,}06\hat{}x; "")$ afficher « pop B<Pop A ».

Exercice 3 : Coktail

- **Méthode 1 :** Tableur ou programme calculatrice

- **Méthode 2 :**

On modélise le problème par une suite géométrique de premier terme $u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ et de raison $\frac{1}{2}$.

On sait que $u_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

On calcule $S = u_0 + u_2 + \cdots + u_6 = 1 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}} = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}$=1,984<2.

Donc l'affirmation est fausse.