Grandeurs et mesures

André PRESSIAT

IUFM d'Orléans-Tours

Equipe DIDIREM - INRP

Grandeurs : le cas des aires

De Euclide à Hilbert

sous la conduite de R. Hartshorne

Euclide : notions communes

1 - Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.

2 - Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.

3 - Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

4 - Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.

5 - Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.

6 - Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles.

7 - Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles.

8 - Les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales entre elles.

9 - Le tout est plus grand que la partie.

Les aires chez Euclide

La notion d’égalité de figures (triangles) est déjà présente.

Pour traiter les questions concernant ce que nous appelons “aire”, Euclide parle d’un nouveau type d’égalité des figures, sans utiliser un nouveau mot pour cela.

Propriétés satisfaites par la nouvelle relation d'"égalité"

2 - Les sommes de figures "égales" entre elles sont "égales"

3 - Les différences de figures "égales" entre elles sont "égales"

4 - Les moitiés de deux figures "égales" sont "égales". (7')

5 - Le tout est plus grand que la partie. (9)

De plus, Euclide utilise deux autres propriétés admises :

1 - Des figures congruentes sont "égales"

6 - Si deux carrés sont "égaux", leurs côtés sont égaux.

Euclide, revisité par Hilbert

Figures équidécomposables

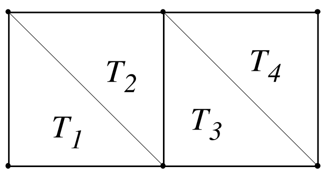
Deux figures P et P' sont équidécomposables s'il est possible d'écrire chacune d'elles sous forme de réunions de triangles n'empiétant pas l'un sur l'autre :

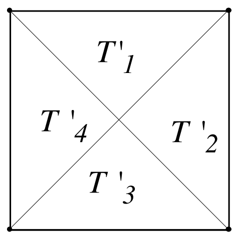
$$P = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$$

$$P' = T'_1 \cup T'_2 \cup \ldots \cup T'_n$$

telles que, pour chaque i, les triangles T_i et T'_i soient “égaux” (Hilbert emploie le mot “congruents” au lieu de “égaux”).

En allemand, le mot correspondant est “zerlegungsgleich” qui signifie “égale décomposition”, ou “égal découpage”.



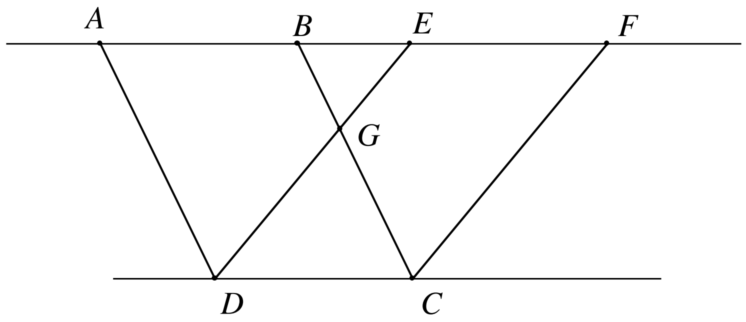


Figures de même contenance
(ou équicomplémentaires)

Deux figures P et P' sont équicomplémentaires s'il existe des figures Q et Q' telles que :

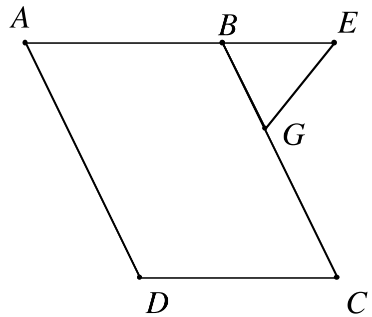
- P et Q n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
- P' et Q' n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
- Q et Q' sont équidécomposables ;
- $P \cup Q$ et $P' \cup Q'$ sont équidécomposables.

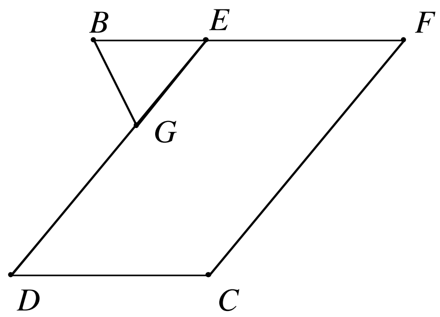
Dans les six premières éditions, Hilbert emploie le mot “inhaltsgleich”, qui signifie littéralement “contenu égal”, ou “superficie égale” ; dans les quatre éditions suivantes, il emploie “ergängzungsgleich” qui signifie “égal par complément”.



ABCD et *CDEF* sont les deux parallélogrammes dont il s'agit de démontrer qu'ils ont même contenance (Proposition I-35 d’Euclide)

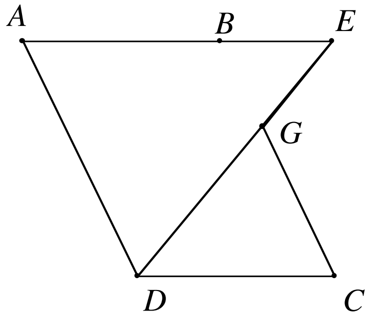
Pour cela, on ajoute le triangle *BEG* à chacun des parallélogrammes. Il s’agit alors de démontrer que les deux figures ainsi obtenues :

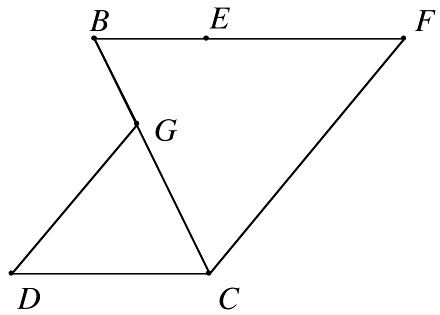




sont équidécomposables.

Pour cela, on décompose chacune d'elles en deux triangles :





- les triangles *ADE* et *CDG* pour la première,
- les triangles *BCF* et *CDG* pour la seconde.

Il suffit de démontrer que *ADE* et *BCF* sont congruents.

$P \sim Q \Leftrightarrow P$ et Q sont équidécomposables.

$P \approx Q \Leftrightarrow P$ et Q sont équicomplémentaires.

Equidécomposables | | équicomplémentaires

Equicomplémentaires $\overset{?}{\prod}$ Equidécomposables

Faux sans l’axiome d’Archimède.

En admettant l’axiome d’Archimède, résultat non démontré à ce jour par des moyens purement géométriques.

La réciproque est vraie dans un plan de Hilbert vérifiant l’axiome d’Euclide (P) et l’axiome d’Archimède (A) **à condition de disposer d’une fonction mesure pour les aires**, à valeurs dans son corps des segments.

Propriétés de la relation d'équidécomposabilité

Dans un plan de Hilbert (axiomes d'appartenance, d'ordre, de congruence pour les segments et pour les angles) :

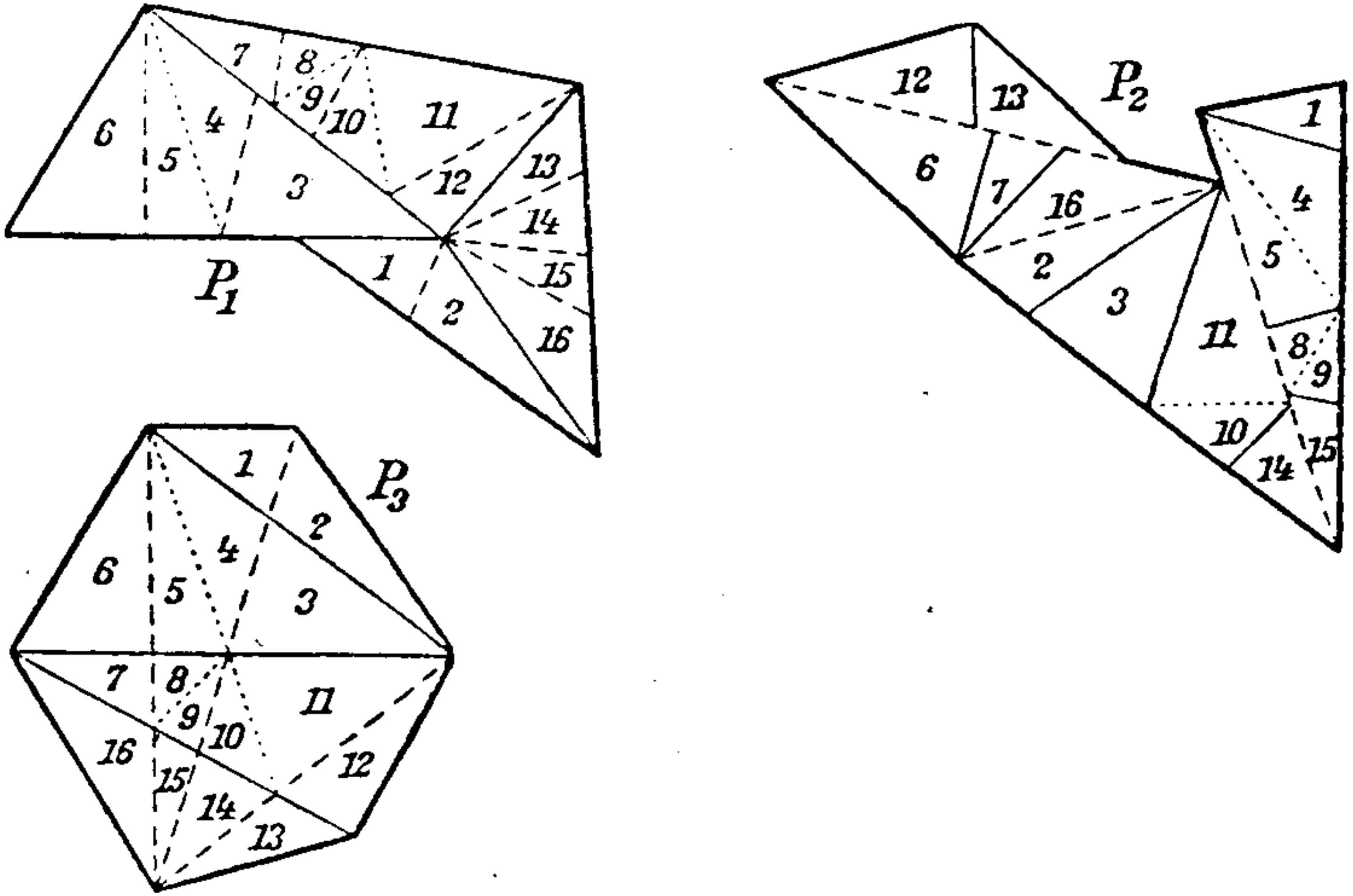
- $\sim$ est une relation d'équivalence
- Si $P \sim P'$ et $Q \sim Q'$, et si P et Q d'une part, P' et Q' d'autre part sont quasi-disjointes, alors $P \cup Q \sim P' \cup Q'$.

Propriétés de la relation d'équicomplémentarité (ou d'égale contenance)

- $\approx$ est une relation d'équivalence.

- Si $P \approx P'$ et $Q \approx Q'$, et si P et Q d'une part, P' et Q' d'autre part sont quasi-disjointes, alors $P \cup Q \approx P' \cup Q'$.

- Si $P \approx P'$ et $Q \approx Q'$, et si $Q \subset P$ et $Q' \subset P'$, alors :
$P \setminus Q \approx P' \setminus Q'$



P_1
P_2
P_3

Bilan provisoire :

Dans un plan de Hilbert, ≈ est une relation qui satisfait les propriétés 1, 2 et 3 énoncées au départ.

Comment satisfaire les propriétés 4, 5 et 6 ?

Axiome de de Zolt

(Z) Si *Q* est une figure incluse dans la figure *P*, et si *P* \ *Q* a un intérieur non vide, alors *P* et *Q* n’ont pas la même contenance.

On ne connaît pas à ce jour de démonstration purement géométrique de cet énoncé à partir de la définition de figures d’égale contenance donnée ci-dessus.

Dans un plan euclidien dans lequel (*Z*) est satisfait, 4, 5 et 6 le sont aussi.

En reprenant les démonstrations faites par Euclide, en remplaçant chacune des occurrences de “figures égales” par “figures d’égale contenance”, on constate le phénomène suivant :

- tous les énoncés dans lequel Euclide démontre que deux figures sont égales demeurent vrais pour la notion d’égale contenance.

- quand une hypothèse d’égale contenance est utilisée pour conclure quelque chose concernant des congruences de segments ou d’angles, l’axiome (*Z*) est nécessaire.

Exemples :

- Les triangles égaux, construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles. (I.40)
- Deux énoncés dans la démonstration desquels on utilise le fait que si des carrés ont même contenance, alors leurs côtés sont congruents :

- La réciproque du théorème de Pythagore (I.48)

- La caractérisation d’une tangente à un cercle (si d’un point extérieur à un cercle on mène deux droites coupant le cercle de telle manière que le carré de l’une est égale au rectangle formé par les segments de l’autre, alors la première est tangente au cercle).

• L’existence d’un triangle isocèle dont les angles à la base sont le double de l’angle au sommet, et la construction du pentagone régulier à la règle et au compas.

L’axiome (*Z*) est satisfait s’il existe dans le plan de Hilbert avec (*P*), une fonction mesure pour les aires.

Définition :

Une fonction mesure pour les aires sur un plan de Hilbert est une application α de l'ensemble $\mathcal{P}$ des figures à valeurs dans un groupe abélien ordonné G telle que :

- Pour tout triangle T, $\alpha(T) > 0_G$

- Si T et T' sont des triangles congruents, alors $\alpha(T) = \alpha(T')$,

- Si deux figures P et Q n'empiètent pas l'une sur l'autre, alors :
$\alpha(P \cup Q) = \alpha(P) + \alpha(Q)$.

$\alpha(T)$ est appelée aire de la figure P, relativement à la fonction α.

Supposons qu'il existe une fonction mesure pour les aires sur un plan de Hilbert.

- Si P est une figure d'intérieur non vide, alors $\square(P) > 0_G$
- Si P et P' sont des figures équidécomposables, alors $\square(P) = \square(P')$
- Si P et P' sont des figures équicomplémentaires, alors $\square(P) = \square(P')$
- Si une figure Q est contenue dans une figure P, et si $P \setminus Q$ a un intérieur non vide, alors $\square(Q) < \square(P)$.

En particulier**, *P* et *Q* ne peuvent avoir même contenance, et donc (*Z*) est satisfait.**

Hartshorne démontre l'existence et l'unicité d'une telle fonction □ dans un plan de Hilbert avec (P), prenant ses valeurs dans le corps des segments et satisfaisant la formule usuelle donnant l'aire d'un triangle : □(ABC) = 1/2 bh, b désignant la longueur de l'un des côtés, et h la hauteur correspondante.

> Il convient de démontrer que la définition est indépendante de la base du triangle choisie, et de la triangulation utilisée pour décomposer une figure (démonstration est assez délicate).

On en déduit que dans un plan euclidien, toute la théorie euclidienne des aires est satisfaite à condition d'interpréter l'égalité des figures en termes de figures de même contenance (ou de figures équicomplémentaires).

On peut même démontrer le résultat suivant :

Dans un plan de Hilbert avec (*P*), muni d'une fonction mesure des aires □, deux figures *P* et *P'* ont même contenance si et seulement si □ (*P*) = □ (*P'*).

Dans un tel cadre, la théorie des aires obtenue à l'aide de la fonction □ et celle des figures de même contenance sont essentiellement équivalentes.

Mesure des aires

Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, 1975.

Boltianskii, *Hilbert's third problem*, John Wiley & Sons, 1978.

Rogalski M., avec Robert A., Pouyanne N., *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*, Ellipses, 2001.

Un carré C
Le réseau R plan construit à partir de C (niveau 0).
Une partie F bornée du plan

a_0 : nombre de carrés du réseau R formés entièrement de points de F.
b_0 : nombre de carrés du réseau R dont certains points appartiennent à F.

On subdivise chaque carré de R en 100 carrés de même côté.

Réseau R_1 (niveau 1), et on recommence indéfiniment …
Réseaux R_k (niveau k).

Au niveau k :
a_k : nombre de carrés du réseau R_k formés entièrement de points de F.
b_k : nombre de carrés du réseau R_k dont certains points appartiennent à F.

$$a_0 \leq \frac{a_1}{10^2} \leq \frac{a_2}{10^4} \leq \ldots \leq \frac{a_k}{10^{2k}} \leq \ldots \leq \frac{b_k}{10^{2k}} \leq \ldots \leq \frac{b_2}{10^4} \leq \frac{b_1}{10^2} \leq b_0$$

F est quarrable si : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b_n - a_n}{10^{2n}} = 0$

Invariance par déplacement du réseau initial ? (Voir plus loin)

On définit ainsi une application s qui associe à chaque figure quarrable F du plan un nombre réel $s(F)$, appelé “aire de F”.

Propriétés de l’aire

(□) La fonction *s* est positive.

(□) *s* est additive : si *F* et *F’* sont deux figures quarrables n’ayant pas de points intérieurs en commun, $s\left(F \;\square\; F'\right) = s(F) + s(F')$

(□) *s* est invariante par translation.

(□) *s* est normalisée : $s(Q) = 1$, *Q* désignant un carré du réseau initial *R*.

Tout polygone est quarrable.

Il existe une fonction *s* et une seule définie sur l’ensemble des polygones qui satisfait les conditions (□), (□), (□) et (□).

Ce dernier résultat permet de définir axiomatiquement l’aire, sans recourir aux réseaux précédents : on a seulement besoin d’un carré unité (qui est fixé).

Autres propriétés de l'aire

•□(□□) *s* est croissante. En remplaçant (□), (□), (□), (□) par (□□), (□), (□) et (□) on obtient un système d'axiomes équivalent.

• Quelles que soient les figures quarrables *F* et *F'*,

$$s\left(F \;\square\; F'\right) = s(F) + s(F') - s\left(F \;\square\; F'\right)$$

•□L'aire d'un rectangle est égale à *ab*, produit des longueurs de ses côtés.

•□(□□) *s* est invariante par déplacement.

• *s* ne change pas si l'on remplace le carré initial par un carré isométrique, (d'où l'invariance de s par rapport au déplacement du réseau initial).

• Si *F* est quarrable et *f* est une similitude de rapport *k*, *f(F)* est quarrable et $s(f(F)) = k^2\, s(F)$.

Indépendance des axiomes de l’aire

(□), (□), (□) et (□) sont indépendants□ si on abandonne l’un des axiomes, on peut construire une fonction distincte de s vérifiant les trois autres.

L’indépendance de (□) est la plus difficile à démontrer. L’auteur démontre en fait le résultat plus fort□ (□) est indépendant de (□), (□), (□).

En démontrant l’indépendance de (□), on prouve que la formule relative à l’aire du rectangle ne peut pas être déduite des axiomes (□), (□), (□), sans utiliser (□).

Méthodes de calcul pour les aires

- L’axiome (□) (ou l’axiome (□′)) peut être utilisé pour obtenir des inégalités d’aires, et par passage à la limite des égalités d’aires.

Méthode d’exhaustion

F étant une figure quarrable, et (G_n) une suite de parties de F telle que l’aire de $F \setminus G_n$ puisse être rendue aussi petite que l’on veut à condition que n soit suffisamment grand, alors $s(F) = \lim_{n \to +\infty} s(G_n)$.

F étant une figure quarrable, et (G_n) une suite de parties de F, et (H_n) une suite de parties contenant F telles que $\lim_{n \to +\infty} s(H_n - G_n) = 0$, alors $s(F) = \lim_{n \to +\infty} s(G_n)$.
(Calcul de l’aire du disque).

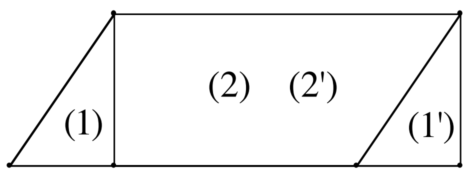
Ainsi l’axiome (□) est indispensable pour établir les résultats concernant l’aire du rectangle et l’aire du disque.

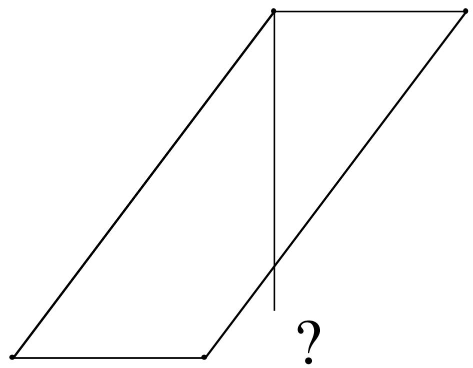
Le concept d’aire tel qu’il est enseigné dans le secondaire est assez proche de la caractérisation axiomatique (□), (□), ($□^{□}$), (□).

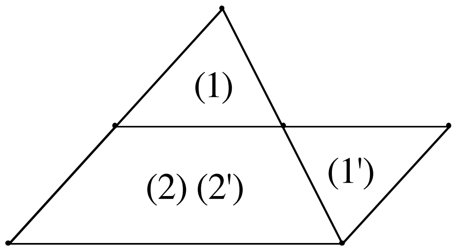
La seule différence tient dans le fait que cette dernière démontre l’existence et l’unicité d’une telle fonction, alors que, dans le cadre scolaire, ces propriétés sont considérées comme résultant de l’expérience ou des cours de mathématique et de physique des années antérieures.

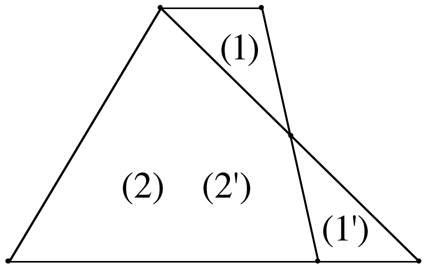
A partir de (□), (□), ($□^{□}$), (□) et de la formule donnant l’aire d’un rectangle (justifiée lorsque a et b sont rationnels, admise dans le cas général), on a tout ce qu’il faut pour calculer l’aire d’un polygone.

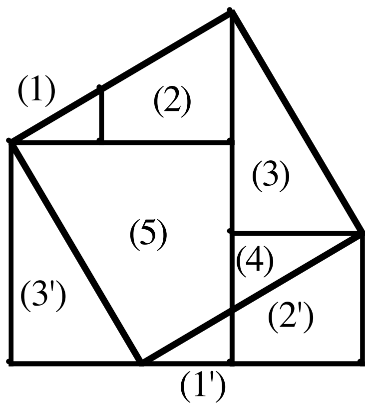
• En utilisant les axiomes (□) et (□), on peut calculer des aires par la **méthode de décomposition**, qui repose sur le fait que deux **figures équidécomposables** ont même aire. En notant + les réunions de figures quasi-disjointes, pour calculer l'aire d'une figure F, on la décompose sous la forme $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$, de telle manière qu'en faisant subir à chacune des F_n un déplacement convenable, on obtienne n figures $H_1, H_2, \ldots H_n$ quasi-disjointes dont la réunion $H_1 + H_2 + \ldots + H_n$ est une figure H dont on connaît déjà l'aire.

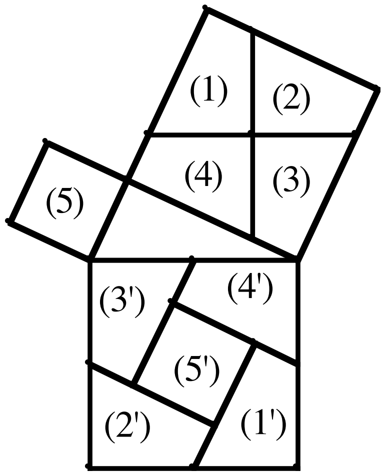


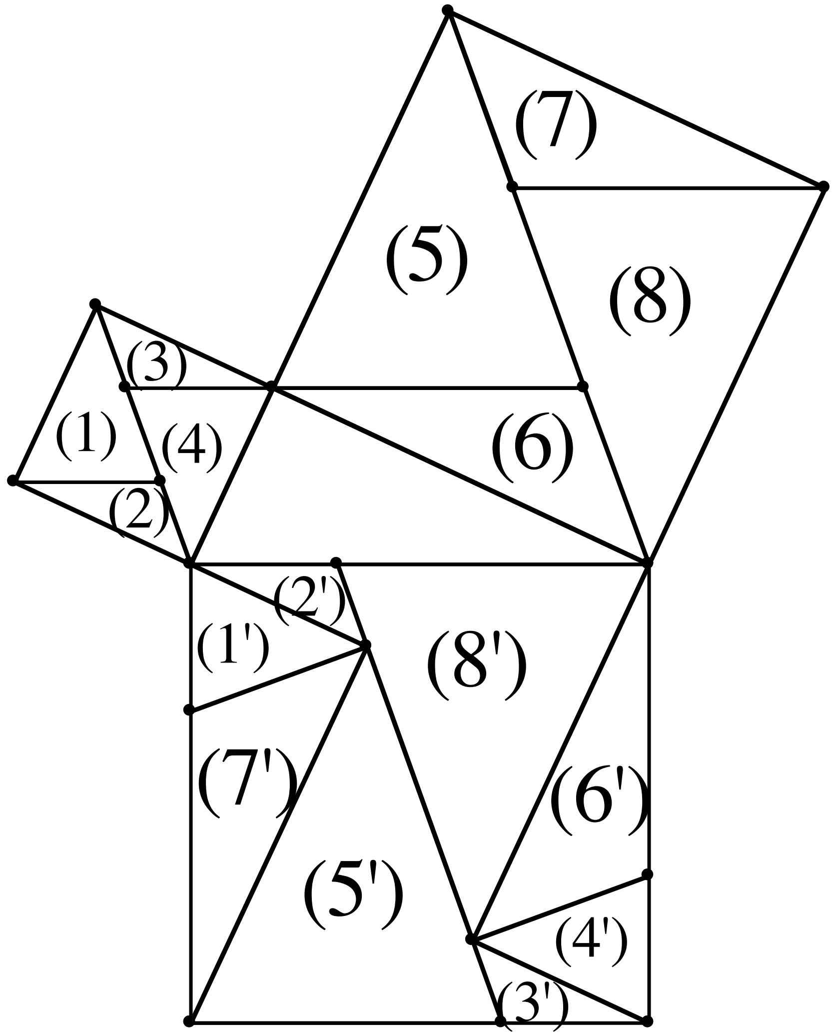



(1)
(2) (2')
(1')

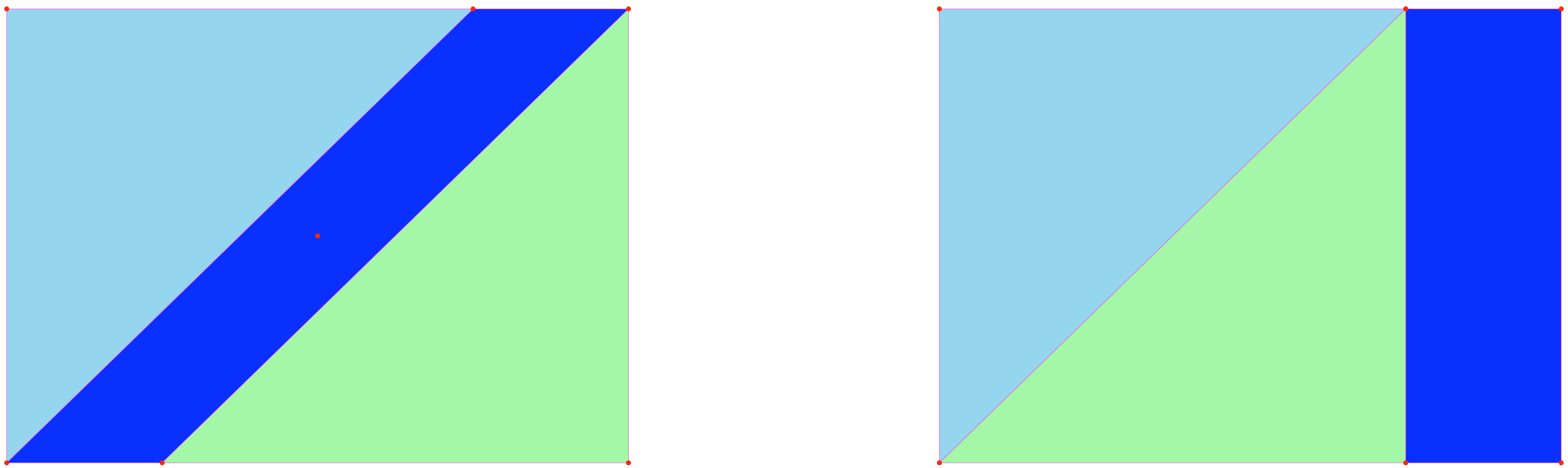

(1)
(2)
(2')
(1')

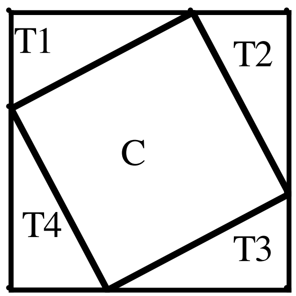

(1)
(2)
(3)
(5)
(4)
(3')
(2')
(1')

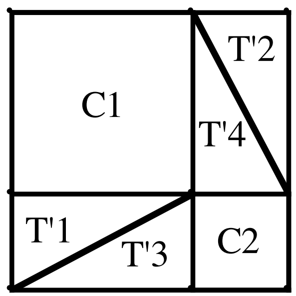

(1)
(2)
(4)
(3)
(5)
(3')
(4')
(5')
(2')
(1')

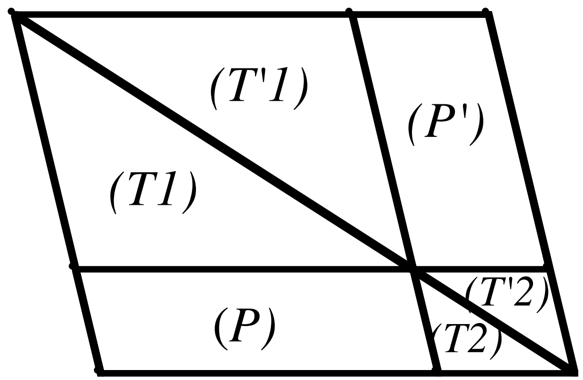

(7)
(5)
(8)
(3)
(1)
(4)
(6)
(2)
(2')
(1')
(8')
(7')
(6')
(5')
(4')
(3')

• En utilisant encore les axiomes (□) et (□′), on peut calculer des aires par la **méthode de complémentation**, qui repose sur le fait que deux **figures équicomplémentaires** ont même aire.




T1
T2
C
T4
T3


T'2
C1
T'4
T'1
T'3
C2


(T'1)
(P')
(T1)
(P)
(T'2)
(T2)

Dans l’enseignement des aires dans le secondaire, on ne démontre pas la formule donnant l’aire d’un rectangle dans le cas général, et pour l’aire du disque, on la **définit** comme limite d’aires de polygones□les deux interventions de l’axiome (□) dans la théorie des aires sont donc obscurcies.

Si on considère la formule relative à l’aire du rectangle comme un axiome noté (□□), (□) est implicitement contenu dans (□□), si bien que la théorie des aires de polygones élaborée dans l’enseignement secondaire est faite à partir des trois axiomes (□□), (□) et (□).

Lien entre égale contenance (ou équicomplémentarité), égalité d'aires et équidécomposabilité.

Il n'y a pas équivalence entre équicomplémentarité et équidécomposabilité dans un plan non archimédien.

Dans un plan de Hilbert avec (P), muni d'une fonction mesure des aires □, deux figures P et P' ont même contenance (sont équicomplémentaires) si et seulement si □ (P) = □ (P').

Il est clair que si deux figures P et P' sont équidécomposables, alors elles ont même aire : □ (P) = □ (P').

Que dire de la réciproque ?

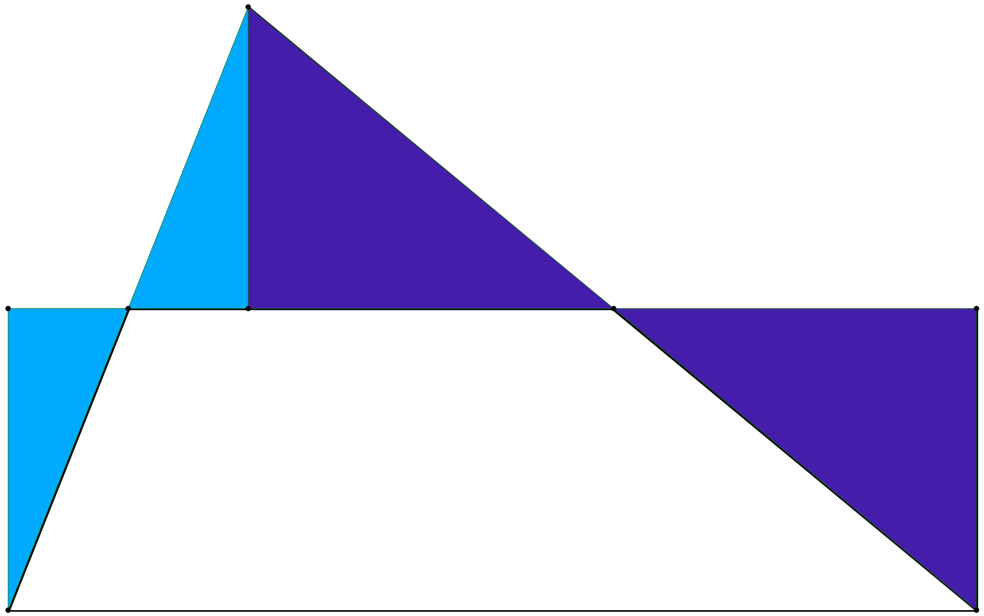
Théorème de Bolyai-Gerwien

Dans un plan de Hilbert dans lequel les axiomes (*P*) et (*A*) sont satisfaits, soit □ la fonction mesure des aires.
Deux figures *P* et *P’* sont équidécomposables si et seulement si elles ont même aire : □ (*P*) = □ (*P’*).

Il a été démontré par le mathématicien hongrois Farkas Bolyai (en 1832) et le mathématicien amateur P. Gerwien (en 1833).

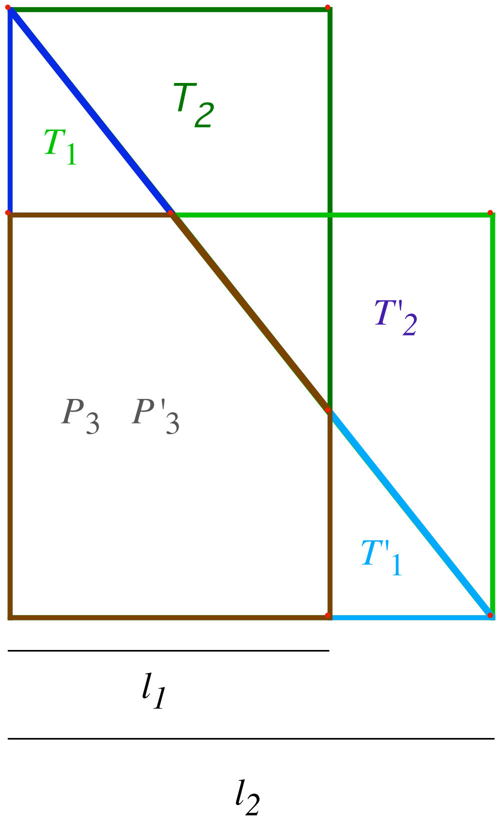
On doit à Hilbert d’avoir montré le rôle fondamental de l’axiome d’Archimède, et le caractère non nécessaire de l’axiome des parallèles : le théorème demeure valable en géométrie hyperbolique et en géométrie elliptique.

On démontre d'abord qu'un triangle est équidécomposable avec un rectangle.



La démonstration repose ensuite sur le résultat suivant :
Deux rectangles de même aire sont équidécomposables.

On peut le démontrer en deux temps :
- pour des rectangles dont les longueurs sont telles que $l_1 \leq l_2 \leq 2l_1$.



- on se ramène à ce cas lorsque $l_2 > 2l_1$ en construisant un rectangle équidécomposable au premier dont les dimensions vérifient $l'_2 \leq 2l'_1$; c'est ici qu'intervient l'axiome d'Archimède.

Ainsi, dans un plan de Hilbert dans lequel les axiomes (P) et (A) sont satisfaits, □ désignant la fonction mesure des aires,

Quels que soient les figures polygonales *P* et *Q*, il y a équivalence entre les trois énoncés suivants :

$P \sim Q$: *P* et *Q* sont équidécomposables.

$P \approx Q$: *P* et *Q* sont équicomplémentaires.

□ (P) = □ (Q') : *P* et *Q* ont même aire.

Equidécomposabilité selon le groupe des translations et symétries centrales

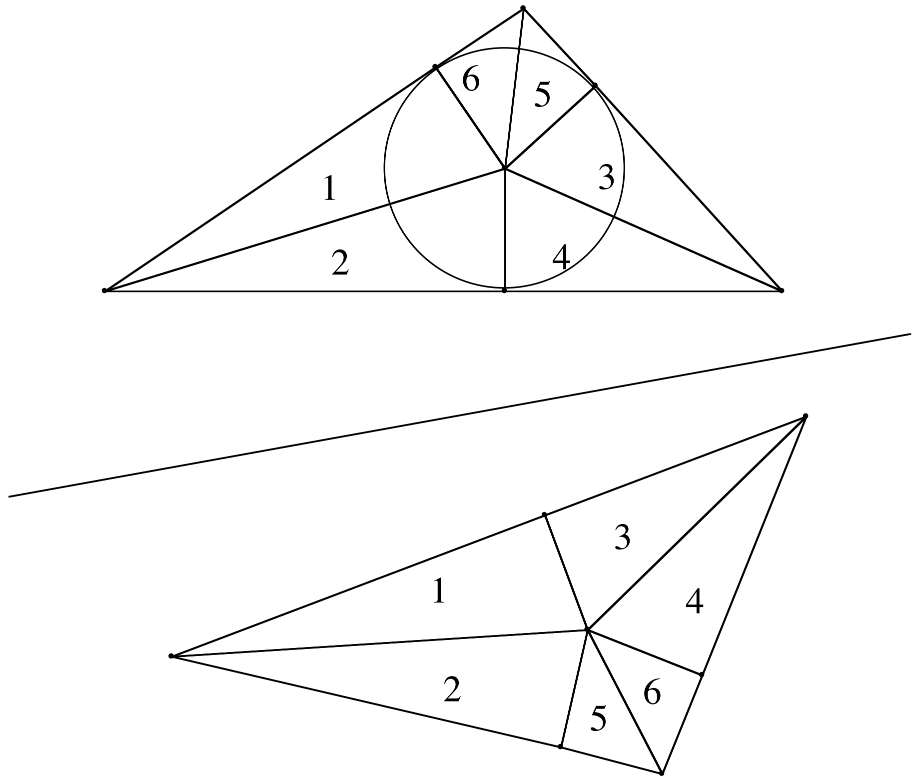
Dans la définition de figures équidécomposables, on exige que pour chaque i, les triangles T_i et T'_i soient “égaux” ou “congruents”, c’est-à-dire qu’il existe une isométrie f_i du plan telle que $f_i(T_i) = T'_i$

On peut augmenter les contraintes sur les transformations f_i. Il convient cependant qu’elles appartiennent à un groupe G, afin que la nouvelle relation d’équidécomposabilité obtenue soit encore une relation d’équivalence. Cette relation est appelée G-équidécomposabilité.

On peut envisager les cas suivants :
G = groupe des isométries planes (noté I)
G = groupe des déplacements du plan (noté D)
G = groupe des translations et symétries centrales (noté S)
G = groupe des translations du plan (noté T).

Deux figures (I-)équidécomposables sont également D-équidécomposables.

En effet, un triangle et son symétrique par rapport à une droite sont équidécomposables.



Que se passe-t-il lorsque $G = S$?
Peut-on décomposer deux figures de même aire de façon à ce que les pièces correspondantes aient des côtés parallèles deux à deux ? La réponse est “Oui”. Ce résultat, démontré par les mathématiciens suisses Hadwiger et Glur en 1951, est assez surprenant.

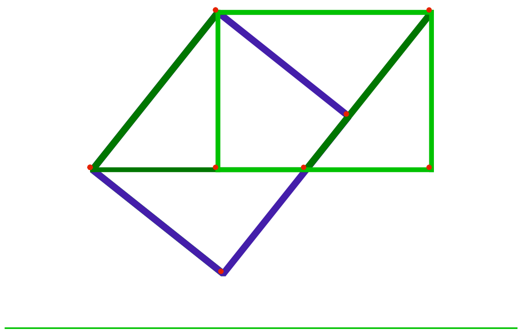
Ainsi deux carrés de même aire non translatés l’un de l’autre sont S-équidécomposables (Voir Rogalski et al., pour une solution, page 235-237).

• La décomposition d’un triangle en un rectangle de même aire donnée dans la démonstration du théorème de Bolyai-Gerwien est une S-décomposition.

On peut montrer que deux rectangles de même aire sont *T*-équidécomposables, donc *S*-équidécomposables.

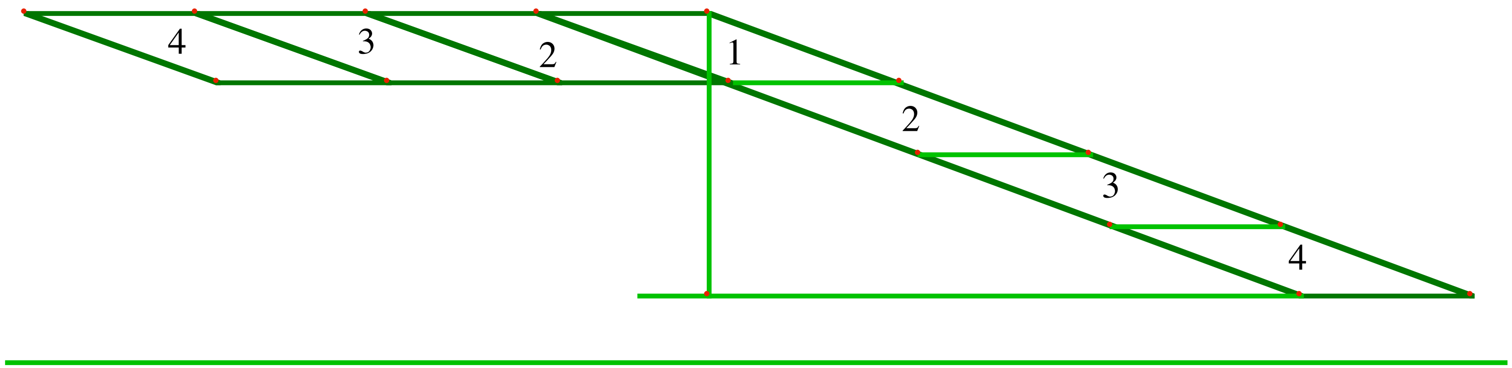
Transformons un rectangle (mauve) en un rectangle équidécomposable (vert clair) ayant un côté parallèle à une droite donnée.

Par translation d'un triangle, on transforme le rectangle mauve en un parallélogramme (vert foncé) ayant des côtés parallèles à la droite.



Du sommet d'un angle obtus de ce parallélogramme, on trace une hauteur (perpendiculaire à la droite). Si cette hauteur est entièrement contenue dans le parallélogramme, on obtient le rectangle (vert clair) recherché en translatant un triangle.

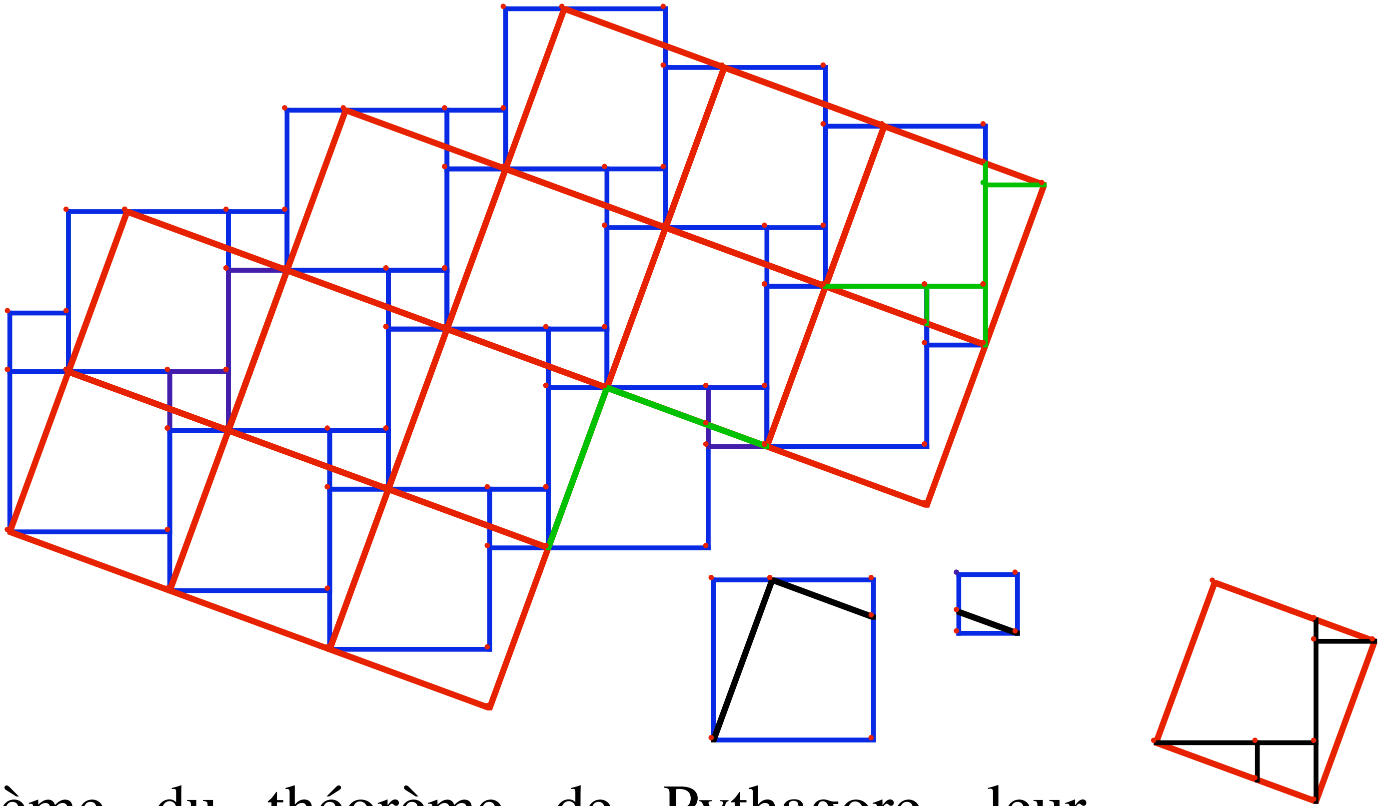
Sinon, on décompose ce parallélogramme en parallélogrammes isométriques et on translate les morceaux de manière à former un parallélogramme qui contienne entièrement sa hauteur.



L'équicomplémentarité est en général difficile à utiliser⊡ on ne sait pas en général quelles figures "ajouter" aux figures initiales de manière à obtenir deux nouvelles figures qui soient équidécomposables.

En revanche, le travail sur l'équidécomposition a donné lieu depuis longtemps à l'élaboration de techniques de décompositions ("dissections" en anglais⊡ les morceaux ne sont pas nécessairement des triangles). Dans un ouvrage récent (1997), intitulé *Dissections, Plane & Fancy*, Greg N. Frederickson en dresse un inventaire exhaustif, dont nous donnerons quelques exemples.

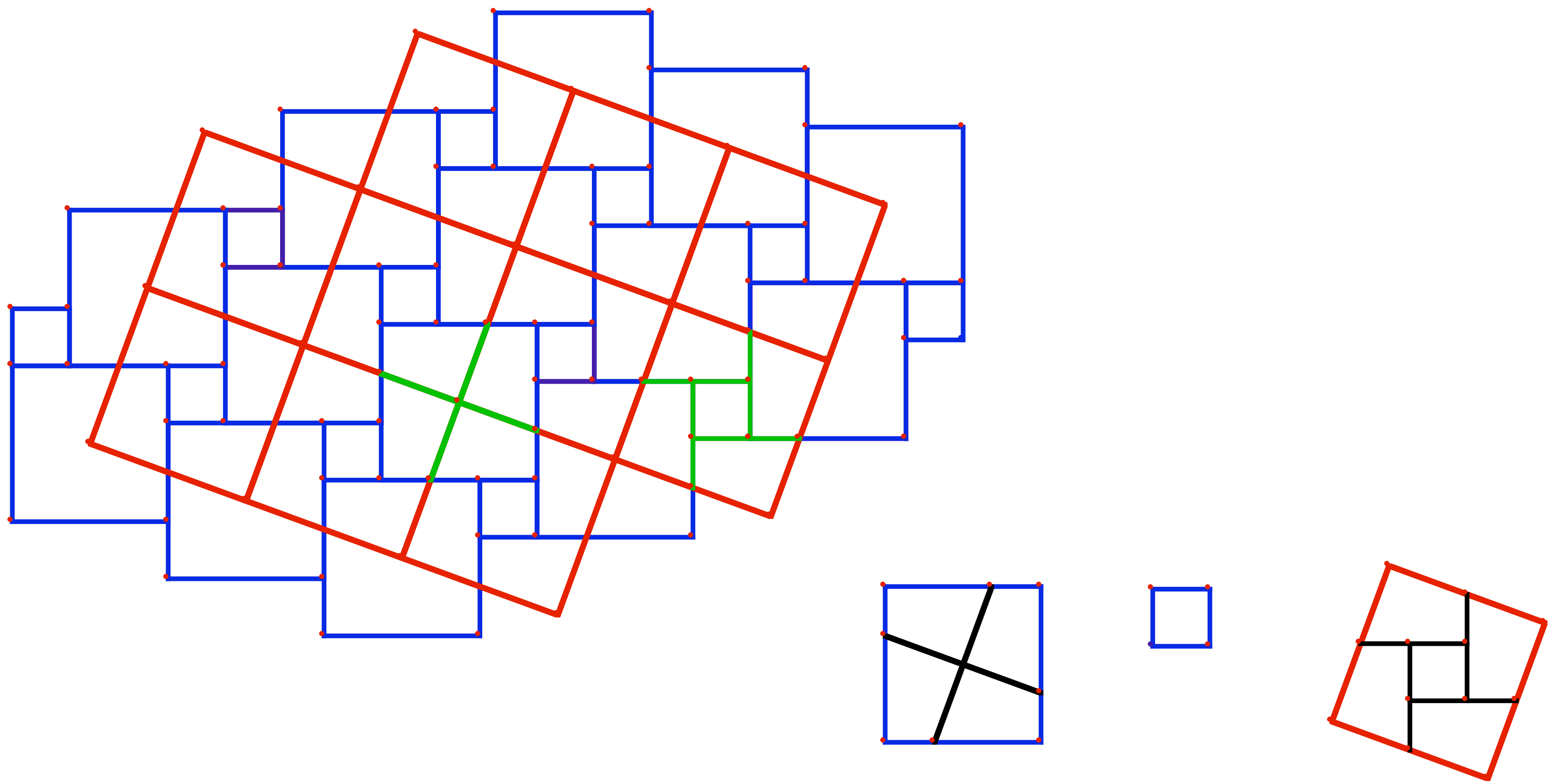
•L'utilisation de pavages



Sur le thème du théorème de Pythagore, leur superposition fournit les décompositions des deux premiers carrés, permettant de reconstituer le troisième.

Superposition réalisée par Mahlo (1908), et MacMahon (1922)

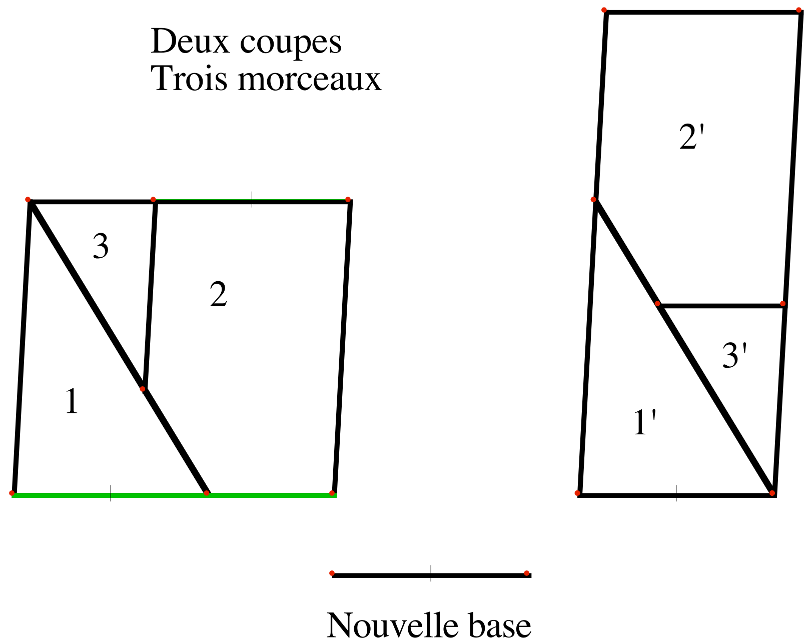
“Dissection” due à Henry Perigal (1873)



•La “P-slide” (glissement du parallélogramme)

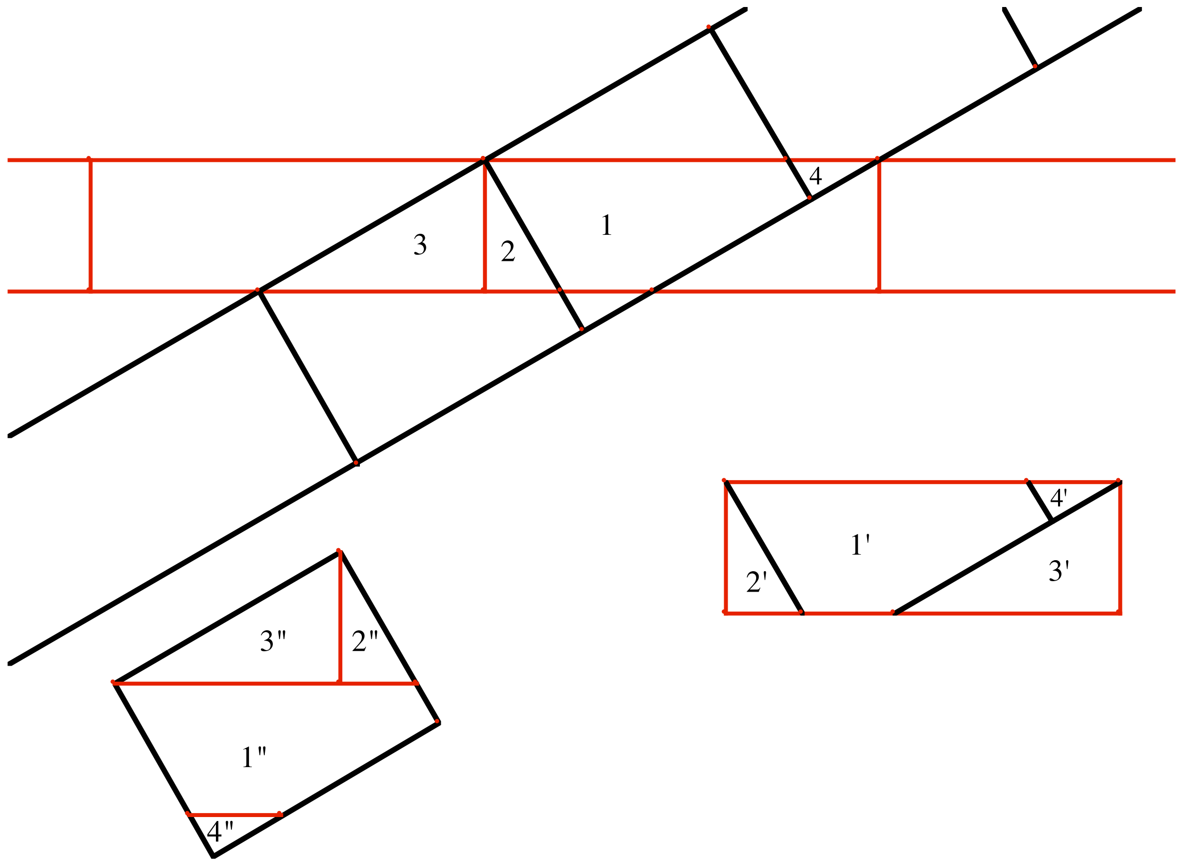
Cette technique transforme un parallélogramme en un parallélogramme de même aire et ayant les mêmes angles.

Technique ainsi dénommée par Harry Lindgren, auteur du livre *Geometric dissections* (1964).



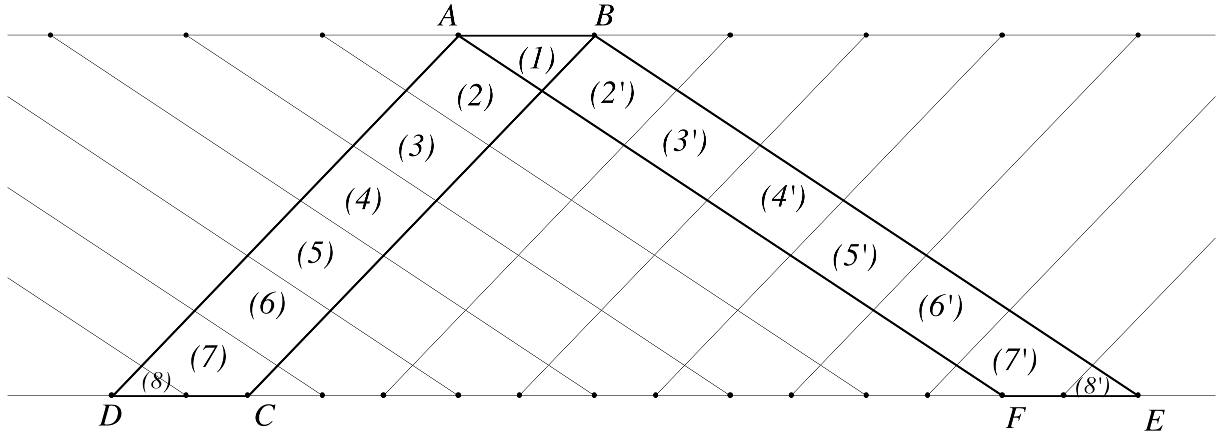
• La technique de la bande simple (Plain strip, ou P-strip)

Son emploi pour trouver une équidécomposition de deux rectangles de même aire : on fabrique deux bandes avec pour motifs les rectangles en question.



On superpose ces bandes de façon à ce que les bords de l’une coupent un bord de l’autre suivant deux points dont la distance est égale à la longueur du motif de cette deuxième bande. Les pièces apparaissent dans l’intersection des deux bandes.

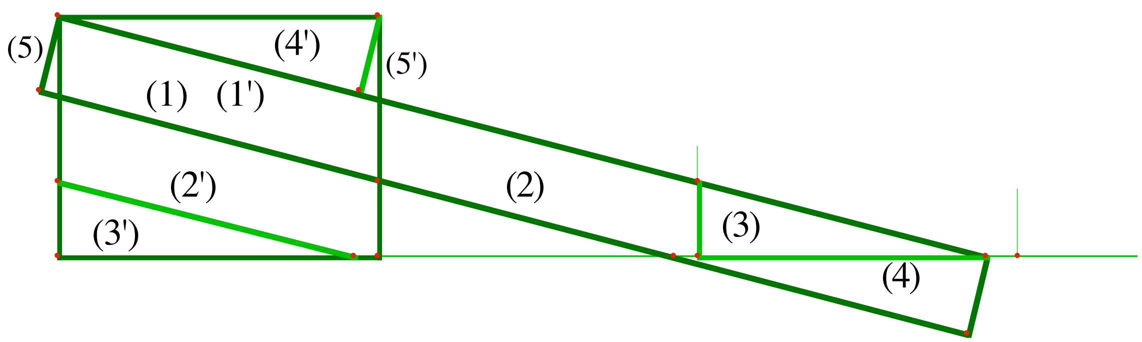
Appliquée dans le cas de deux parallélogrammes ayant une base en commun et de même aire, cette technique donne le résultat suivant, qui fournit une T-équidécomposition des deux parallélogrammes, lorsqu'aucun des deux ne contient entièrement une de ses hauteurs.



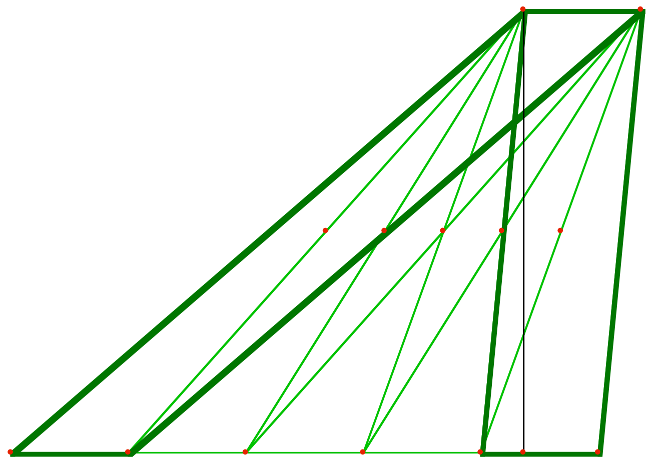
Cette technique est une généralisation d'une méthode proposée par Montucla pour décomposer un rectangle en un carré de même aire.

• Technique de Montucla (décrite dans Ozanam, 1778)

Elle permet d’obtenir une *T*-équidécomposition de deux rectangles de même aire.



• Technique élémentaire pour “redresser” un parallélogramme



Le troisième problème de Hilbert

Il a été résolu par Max Dehn la même année que Hilbert l'avait posé. Dehn a trouvé une condition nécessaire pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables.

Cette condition fait intervenir un invariant, l'invariant de Dehn d'un polyèdre. Si deux polyèdres sont équidécomposables, leurs invariants de Dehn sont égaux.

En montrant que les invariants de Dehn du tétraèdre régulier ayant pour côté l'unité et celui du cube de même volume sont différents, on prouve qu'ils ne sont pas équidécomposables.

S désignant un polyèdre, désignons par $l_1, l_2, \ldots, l_n$ les longueurs de ses arêtes, et par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ ses angles dièdres.
Alors l'invariant de Dehn de S est égal à :

$$D(S) = l_1 \otimes \theta_1 + l_2 \otimes \theta_2 + \ldots + l_n \otimes \theta_n$$

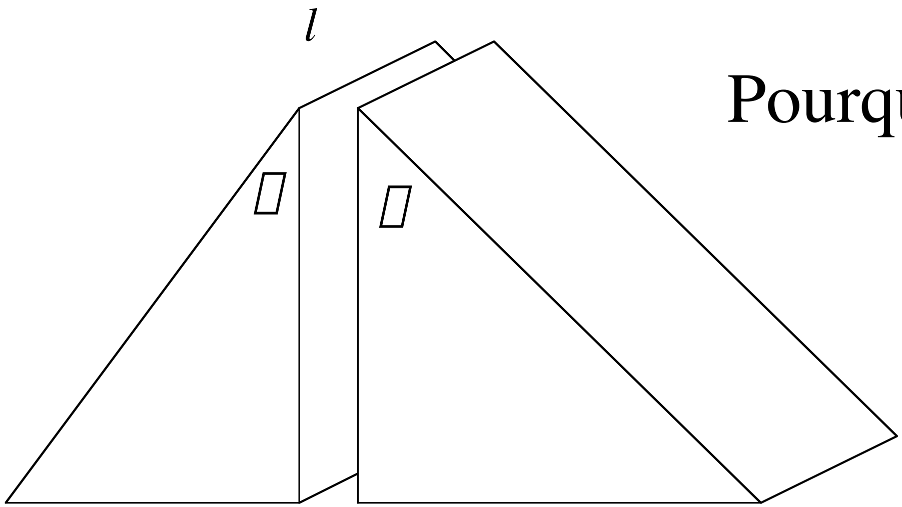
avec les règles de calcul suivantes :

$$l \otimes (\theta + \varphi) = l \otimes \theta + l \otimes \varphi$$

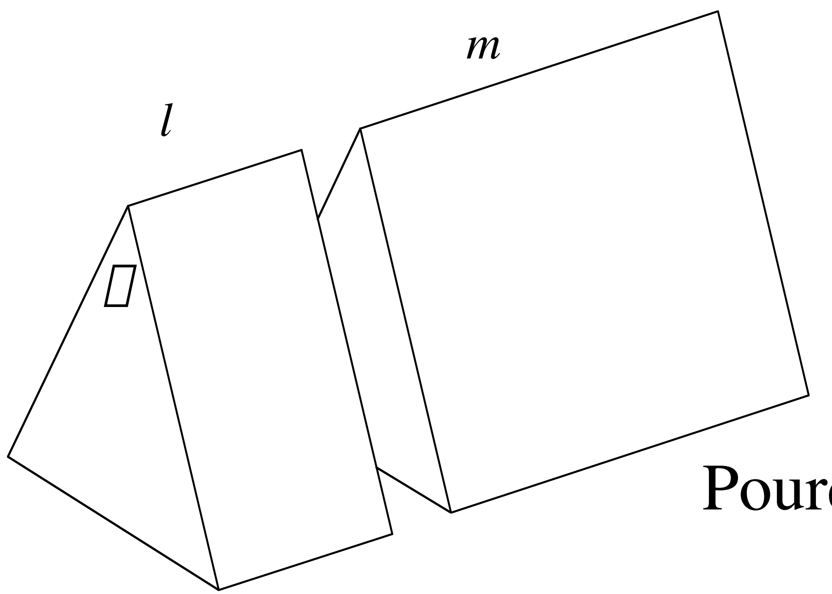
$$(l + m) \otimes \theta = l \otimes \theta + m \otimes \theta$$

$$l \otimes \pi = 0$$

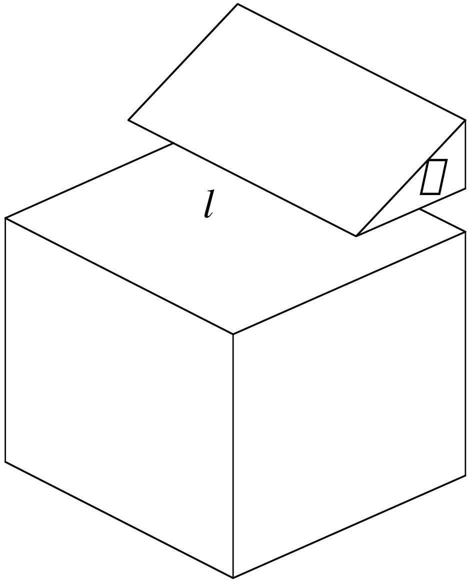
$D(S)$ est un élément du produit tensoriel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$



Pourquoi $l \quad (□ + □) = l \quad □ + l \quad □$



Pourquoi $(l + m) \quad □ = l \quad □ + m \quad □$



Pourquoi $l \quad \square = 0$

ou encore pourquoi :

$$l \quad (\square + \square) = l \quad \square$$

L'invariant de Dehn d'un cube est égal à 0.

Celui du tétraèdre régulier avec des arêtes de longueur unité est□

$$6 \quad \square, \text{ où } \square \text{ est tel que } \cos\square = \frac{1}{3}$$

On peut démontrer que si $l \neq 0$ et si □ n'est pas le produit de π par un rationnel, alors l □ $\neq 0$.

Il suffit pour cela de démontrer que $\cos(n□) \neq \pm 1$.

On peut démontrer par récurrence que $\cos n□$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction de dénominateur 3^n, dont le numérateur n'est pas un multiple de 3.

Sources□

Stillwell, 1998, *Numbers and geometry*, Springer.
Aigner M., Ziegler G. M., 2000, *Proofs from the book*, 2ème édition, Springer.

Enseigner les grandeurs au collège ?

Problèmes de légitimité

Enseigner les grandeurs ?

1 - Définition du mot « mathématique » dans le dictionnaire

Science qui a pour objet la mesure et les propriétés des grandeurs.

Relatif à la science du calcul, à l'étude des grandeurs, à l'examen logique des relations qui existent ou qui peuvent exister entre les éléments d'un ou plusieurs ensembles.

Euclide : Livre V des Eléments

Grassmann : la science de la grandeur extensive

2. Dans les textes officiels

Le document d’accompagnement du programme actuel de 3e :
le troisième volet de ce document – qui en comporte quatre – est en effet consacré à la ***Place des grandeurs dans l’enseignement des mathématiques au collège***.

Ce texte met en garde contre l’oubli possible des grandeurs :

> « **Historiquement**, c’est bien à partir d’un travail sur les grandeurs qu’ont été construits la plupart des concepts et des théories mathématiques. Il serait d’autant plus dommageable de perdre de vue cette filiation que, comme cela a été signalé, c’est elle qui permet d’assurer les liens avec les autres disciplines. »

> « S’il a été possible aux mathématiques de **s’émanciper de la notion de grandeur**, c’est sans doute qu’elles avaient accumulé quantité d’expériences et de résultats dont il ne semble pas que l’enseignement de base puisse faire l’économie. »

« Sans cette référence, la **présentation des mathématiques serait toutefois beaucoup trop abstraite pour être à la portée des élèves du collège**, et même bien au-delà. Il y a d'ailleurs plusieurs raisons qui rendent indispensable, spécialement dans l'enseignement obligatoire, un **appui résolu, mais distancié**, sur les notions de grandeurs et de mesure. »

« C'est dans des **situations mettant en jeu des grandeurs** que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques. Les mathématiques du citoyen sont celles qui interviennent comme **outils pour les grandeurs**, celles qui permettent de **modéliser efficacement des situations faisant intervenir des grandeurs**. »

La suite du texte nuance l'enthousiasme précédent.
Le nécessaire commerce avec les grandeurs ne doit pas faire oublier que la vraie matière du travail mathématique, ***au collège***, ce ne sont plus tant les grandeurs que les ***nombres***.

« Depuis l'école, on est passé progressivement de situations de comparaison de grandeurs (qui sont des abstractions à partir de caractéristiques d'objets de la vie courante), puis de mesurage, au travail sur les mesures, c'est-à-dire **sur les nombres**. En effet, en mathématiques, **on ne travaille pas sur les grandeurs** (c'est l'objet d'autres disciplines, comme la physique, la technologie, les sciences de la vie et de la Terre ou la géographie et l'économie par exemple), **mais avec les grandeurs ou à partir d'elles** ; ici se situe l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines. »

L'univers extra-mathématique est, sinon présent, du moins représenté.

Partant de grandeurs quand la chose se présente (ce qui n'est pas toujours le cas),

on se hâte de passer aux nombres,
on travaille sur des nombres,

pour ne revenir qu'en fin de parcours aux grandeurs.

Le maintien du *statu quo ante* est compatible avec ce texte, dont certains développements auraient pu inquiéter.

3 - Un peu d'histoire

Article « Mathématique ou Mathématiques » de l'Encyclopédie (1751-1772), rédigé par d'Alembert :

Mathématiques pures : considèrent les propriétés des grandeurs d'une manière abstraite.

La grandeur est calculable ou mesurable :

Calculable : elle est représentée par des nombres (Arithmétique)
Mesurable : elle est représentée par l'étendue. (Géométrie)

Mathématiques mixtes : ont pour objet les propriétés de la grandeur concrète, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers.

Mécanique, Optique, Astronomie, Géographie, Chronologie, Architecture militaire, Hydrostatique, Hydraulique, Hydrographie ou Naviguation, …

Dans les manuels destinés autrefois au collège, ou plutôt aux écoles primaires supérieures (EPS), ce qu'on nomme alors ***arithmétique*** est tout entier organisé ***autour de la notion de grandeur***.

Cette organisation mathématique mixte se maintiendra longtemps (*Nouvelle Encyclopédie autodidactique Quillet* 1958)

Dans les années 1970, les mathématiques mixtes sont les premières victimes de la réforme dite des “mathématiques modernes”.

Aspect anti-utilitariste, prônant la pureté, l’autarcie des mathématiques enseignées.

Redéfinition générale des frontières disciplinaires :
Légitimité, pour une discipline donnée, de mettre en jeu des concepts qui sont l’apanage d’une autre : prétention illégitime ? Dangereuse ?

4 - La question des unités

En classe de mathématiques, les objets supports des grandeurs (une règle de telle longueur, un vase de telle capacité, …) sont évoqués, mais ne sont pas amenés dans la classe pour y être exploités (sauf exception).

Les grandeurs pourraient y être aisément présentes sous la forme de “nombres concrets” :

> 15 km est une longueur,
> 50 km/h est une vitesse, …

Or *les unités - et donc les grandeurs - y disparaissent*, et ceci depuis longtemps.

« Triangle des Bermudes ».

Exemple
En 6e, il s’agit de déterminer combien il y a de minutes dans une demi-heure, dans un quart d’heure, dans un cinquième d’heure.

Les traces écrites d'un élève au le tableau sont les suivantes :

$$\frac{1}{2} = 30 \text{ min} \quad \frac{1}{4} = 15 \text{ min} \quad \frac{1}{5} = 12 \text{ min}$$

Le professeur commente la solution de l'élève, mais ne la corrige pas. Il est pourtant clair que ces égalités ne sont pas correctes : le ***nombre*** 1/5 (= 0,2) ne saurait être égal à la ***durée*** 12 min, pas davantage que 12 cm n'est égal à 12 kg. Les écritures correctes auraient été simplement :

$$\frac{1}{2}\text{ h} = 30 \text{ min} \quad \frac{1}{4}\text{ h} = 15 \text{ min} \quad \frac{1}{5}\text{ h} = 12 \text{ min}$$

On sait pourtant qu'il s'agit là aujourd'hui d'une pratique dominante, à propos de laquelle les professeurs manquent des informations appropriées ou hésitent à les mettre en œuvre.

Tel manuel de mathématiques de 5e commence ainsi fort à propos par indiquer les normes de l’AFNOR (Association française de normalisation) en la matière :

Il est tout à fait autorisé d’écrire :

1,825 km = 1 825 m

2 m × 3,5 m = 7 m^2

Mais les auteurs reprennent dans un exercice l’usage traditionnel :

aire de base A_2 = (6 × 6) : 2 = 18 cm^2

aire de base A_3 = 72 – 18 = 54 cm^2

V_2 = 18 × 12 = 216 cm^3

V_3 = 864 – 216 = 648 cm^3

Technique de calcul bien installé en France dans la classe de sciences physiques (oubli des unités dans les calculs intermédiaires).

L’absence ou la raréfaction des unités pose un problème majeur : celui du ***changement d’unités***.

La technique généralement mise en place, illustrée sur l’exemple suivant, extrait d’un manuel de 3e, est fort complexe et peu fiable.

Convertir les unités de grandeurs composées

Méthode : Convertir successivement les unités des deux grandeurs

Exemple : Convertir 1,25 g/cm^3 en kg/m^3

Réponse :

– On convertit l’unité de masse : 1,25 g = 0,001 25 g

donc 1,25 g/cm^3 = 0,001 25 kg/cm^3.

– On convertit l’unité de volume : 1 m^3 = 1 000 000 cm^3.

0,001 25 × 1 000 000 = 1 250

donc 0,001 25 kg/cm^3 = 1 250 kg/m^3.

– On conclut : 1,25 g/cm^3 = 1 250 kg/m^3.

Par contraste avec cette technique “abstraite”, voici une technique “concrète” qui consiste à calculer ***avec les unités***, c’est-à-dire ***sur des nombres “concrets”***.

Le fait mathématique essentiel est le suivant : les ***durées*** constituent un demi-***espace vectoriel de dimension 1 sur*** **R.**

Le problème posé aux élèves est exactement un problème ***de changement de base***.

La durée qui a pour coordonnée 1/5 dans la base {h} a pour coordonnée 12 dans la base {min} : 1/5 h = 12 min.

$$\frac{1}{5}\text{ h} = \frac{1}{5}(60\text{ min}) = \left(\frac{1}{5}\times 60\right)\text{min} = 12\text{ min}$$

Dans un manuel espagnol actuel (3e) :

5 horas × 5 km/hora = 25 km

$$e = v_m \,.\, t \;\Rightarrow\; t = \frac{e}{v_m} = \frac{400\ \text{km}}{220\ \text{km/h}} = 1{,}82\ \text{h} = 1\ \text{h}\ 49\ \text{min}$$

$$e = v \,.\, t = 100\ \text{km/h}\ .\ 6\ \text{h}\ =\ 600\ \text{km}$$

La technique concrète est utilisée en Angleterre, …

Collection *Teach Yourself Books* (1971).

Ex. 2. Express the speed of 90 km/h ($90\ \text{km h}^{-1}$) in metres per second.

We have $\frac{90\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{90 \times 1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}}$ = **25 m/s ($\mathbf{m\ s^{-1}}$)**.

$$60 \text{ km/h} = \frac{60 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{60\ 000 \text{ m}}{3\ 600 \text{ s}} = \frac{60000}{3600} \text{ m/s} = \frac{100}{6} \text{ m/s} \approx 16{,}67 \text{ m/s}$$

Importance dans cette technique de :

$$\text{h} = 1 \text{ h}$$

à rapprocher du

$$1\,\vec{u} = \vec{u}$$

de la définition d'un espace vectoriel.

5 - Justifications du calcul sur les grandeurs

Certaines d'entre elles reposent sur l'algèbre linéaire.

Jean-Marie SOURIAU, dans son ouvrage Calcul linéaire (PUF 1954) vante les mérites des produits tensoriels de "grandeurs mesurables", notamment pour son intérêt dans les problèmes de changement d'unités, qu'il illustre par l'exemple suivant :

Soit V la vitesse de 100 km $\quad [\mathrm{h}]^{-1}$.

En remplaçant km par 1000 m et h par 3600 s,

on trouve :

$$V = 100\,(1000\ \mathrm{m}) \quad [3600\ \mathrm{s}]^{-1}$$

$$= \frac{100 \times 1000}{3600}\,\mathrm{m} \quad \mathrm{s}^{-1} = 27{,}77\ldots\mathrm{m} \quad \mathrm{s}^{-1}.$$

Dans son ouvrage *Linear Algebra*, Klauss JÄNICH (Springer 1994) étend ces techniques aux calculs concernant les grandeurs vectorielles.

Rémi GOBLOT dans son ouvrage *Agrégation de mathématiques, Thèmes de géométrie*, 1998, Masson, donne une justification théorique de ces techniques (dans laquelle intervient des produits tensoriels). Les puissances de grandeurs considérées ont des exposants entiers relatifs.

En 1968, Hassler Whitney a construit une théorie des grandeurs plus complète dans un article intitulé : *The mathematics of physical quantities, part II : quantity structures and dimensional analysis*, publié dans *The Americain Mathematical Monthly*.

Jänich définit la grandeur L comme le “domaine scalaire des longueurs”, **R**[m] ou **R**[cm] = $\{x \text{ cm} \mid x \in \mathbf{R}\}$

C’est un espace vectoriel sur **R** de dimension 1, où les opérations sont définies par :

$$x \text{ cm} + y \text{ cm} = (x + y) \text{ cm}$$

$$\lambda(x \text{ cm}) = \lambda x \text{ cm}$$

et admet 1 cm pour base.

R[cm] n’est pas seulement une construction formelle : on peut l’interpréter comme l’espace vectoriel des différences de longueurs.

Goblot justifie toutes les techniques de calcul utilisées par Jänich, en construisant une théorie des grandeurs, reposant sur l'algèbre linéaire, et convoquant dans les moments délicats :
- le dual d'une grandeur, noté E^{-1}, pour justifier les cm^{-1}
- des produits tensoriels, pour justifier les $m\ s^{-1}$.

Whitney propose deux théories :

- l'une propose de définir ce qu'est une grandeur : il part d'un demi-groupe divisible, et construit en parallèle les nombres rationnels (ainsi que les opérations et l'ordre les concernant) comme opérateurs sur la grandeur.

- l'autre construit l'algèbre des grandeurs, permettant de faire tous les calculs les concernant et de les justifier. (Espace vectoriel où la loi interne est la multiplication, et la loi externe l'exponentiation).

$\square(\vec{u} + \vec{v}) = \square\vec{u} + \square\vec{v}$	$[xy]^{\square} = [x]^{\square}[y]^{\square}$
$(\square + \square)\vec{u} = \square\vec{u} + \square\vec{u}$	$[x]^{\square+\square} = [x]^{\square}[x]^{\square}$
$\square(\square\vec{u}) = (\square\square)\vec{u}$	$([x]^{\square})^{\square} = [x]^{\square\square}$
$1\vec{u} = \vec{u}$	$[x]^{1} = [x]$

L'article de Whitney permet de donner un cadre mathématique satisfaisant pour l'analyse dimensionnelle, cadre qui faisait défaut à l'époque où Lebesgue a écrit *La mesure des grandeurs*.

Le résultat essentiel est celui qui fonde l'analyse dimensionnelle, c'est-à-dire le théorème de Vaschy - Buckingham, plus connu sous le nom de théorème $\prod$.

C'est grâce à ce théorème que l'on peut déduire l'allure de la formule V = chr^2 donnant le volume d'un cylindre du fait que ce volume est proportionnel à sa hauteur *h*, et proportionnel au carré du rayon *r* de sa base. Le théorème dit que *c* est une constante, mais il ne permet pas de la déterminer ; pour cela, il faut recourir au calcul intégral.

Ces théories sont peu connues et peu enseignées en France. La théorie de Whitney prolonge jusqu'aux grandeurs le projet des structures algébriques dominant à l'époque des mathématiques modernes.

Whitney plaide pour un enseignement du calcul avec unités, et sa théorie permet de justifier la technique d'oubli des unités dans les calculs, couramment utilisée dans l'enseignement actuel de la physique dans le secondaire en France.

Bibliographie

Chevallard Y. Bosch M., 2000-2001, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I : Une Atlantide oubliée, *Petit x* n°55, pp. 5-32, IREM de Grenoble.

Chevallard Y. Bosch M., 2002, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisaions, *Petit x* n°59, pp. 43-76, IREM de Grenoble.

Encyclopædia Universalis, article “Dimensionnelle (analyse et similitude)”.

Pressiat A., 2002, Grandeurs et mesures : évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition, in Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R., *Actes de la 11e Ecole d’Eté de Didactique des Mathématiques*, Corps - 21–30 Août 2001.

Une grandeur fondamentale : les longueurs

Quel enseignement sur les longueurs ?

Reporter une longueur (sans la mesurer)

Additionner deux longueurs (sans les mesurer)

Partager une longueur en *n* parties égales (sans la mesurer)

Les longueurs sont souvent évoquées, mais peu travaillées.

Rôle symbolique de la grandeur “longueur” pour représenter n’importe quelle grandeur (qui est une demi-droite vectorielle).