

Les pavages de terrasses

Elèves :

Fabien Mons-Quendo, 4ème, Collège Fantin Latour, 26 rue N. Chorier, 38000 Grenoble
Guermontpres Benjamin 4ème, Collège Fantin Latour, 26 rue N. Chorier, 38000 Grenoble

Enseignants :

Benoît Le Brun et Nicolas Cellier

Chercheur(s) :

Catriona McLean et Eric Dumas, Université Joseph Fourier, Grenoble

Sujet: On cherche à paver une terrasse rectangulaire avec des pavés de 2x1 cases et des arbres de 1x1 case. La position des arbres est fixée au départ et on cherche à compléter par des pavés de 2x1 cases.

Quelles sont les configurations pour lesquelles le pavage est possible ? Celles pour lesquelles il est impossible ?

Pour simplifier la compréhension et la formulation des règles, nous avons créé un damier sur les terrasses. La première case est blanche. Si le nombre total de cases de la grille est pair, il y aura autant de cases blanches que de cases grises, si le nombre total de cases est impair, il y aura une case blanche de plus.

La figure 1a montre un exemple de pavage réussi alors que la figure 1b montre un pavage qui n'est pas possible.

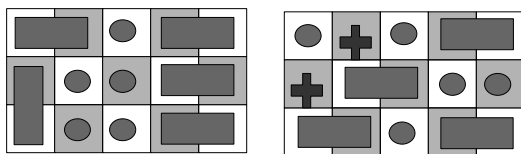


Figure 1a

Figure 1b

Règles générales pour que le pavage soit possible:

Sur une terrasse avec un nombre pair de cases nous avons constaté qu'il fallait un nombre pair d'arbres. Et il faut un nombre impair d'arbres pour une terrasse impaire.

Sur une terrasse avec un nombre pair de cases, il faut placer les arbres de telle façon à ce qu'il y en ait le même nombre entre cases grises et

cases blanches.

Sur une terrasse avec un nombre impair de cases (donc un nombre impair de lignes et de colonnes), il faut placer les arbres de telle façon à ce qu'il y en ait un arbre en plus sur une case blanche. Exemple: 1 arbre sur une case grise et donc 2 arbres sur des cases blanches.

Terrasses simples :

Nous avons d'abord cherché avec des cas simples en commençant par la plus petite terrasse possible: la terrasse 2x2 avec 2 arbres. Les deux cases contenant les arbres doivent avoir un côté en commun.

Puis nous sommes passés aux cas de la terrasse 2x3 avec 2 arbres où on a vu que les deux arbres doivent être soit aux extrémités opposées soit que les deux cases avec des arbres aient un côté en commun.

Dans le cas de la terrasse 2x3 avec 4 arbres, les arbres doivent être en L* , en carré ou aux quatre extrémités.

Sur une terrasse 3x3 avec 1 arbre, il faut placer l'arbre sur une case blanche et elle pourra être remplie.

Sur la même terrasse avec 3 arbres, il faut placer 2 arbres sur des cases blanches et le dernier sur une case grise et le pavage sera également toujours possible.

Sur une terrasse 5x3 avec 1 arbre ou 3 arbres, il faut respecter les règles et le pavage est toujours possible!

Sur la même terrasse avec 5 arbres, en respectant la règle, on peut remplir la terrasse mais on peut également la bloquer.

On voit sur la figure 2 que la position des arbres respecte les règles générales mais sur la première ligne il est obligatoire de mettre un pavé horizontal et il restera une seule case sur laquelle on ne peut pas mettre un pavé vertical. Donc le pavage est impossible.

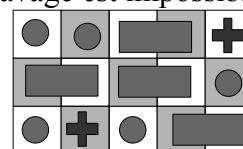


Figure 2

Le pavage est impossible bien que les arbres soit placés au bon endroit (un de plus sur une case grise)

Généralisation avec un seul arbre:

Dans une terrasse avec un nombre impair de cases, peut importe sa taille, avec un arbre placé dans une ligne impaire, il restera un nombre pair de lignes au dessus et en dessous de cet arbre et donc il suffit de paver la ligne comprenant l'arbre puis il restera un nombre pair de ligne. (figure 3a).

Si on met ce même arbre dans une ligne paire, il faudra placer les 4 pavés de manière a entourer l'arbre et ainsi on aura également un nombre pair de lignes et de colonnes autour de cet ensemble (figure 3b).

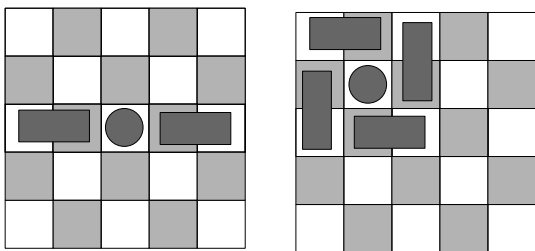


Figure 3a

Figure 3b

Conclusion

A partir des essais que nous avons réalisé, il semble que pour les terrasses contenant un nombre pair de cases, avec deux arbres, en respectant les règles générales mentionnées au début, le pavage soit toujours possible. Avec quatre arbres, nous n'avons pas été assez loin mais il semble que ce soit également le cas.

De même, avec 1 ou 3 arbres sur une terrasse comportant un nombre impair de cases, le pavage semble toujours possible. Nous l'avons démontré pour un arbre.

Par contre, avec 5 arbres et plus, même en respectant les règles générales, il est possible de bloquer le pavage.