Les sudokus

Elèves :
Agathe MALBET 3e, Camille MANGIN 3e ;
Collège Fantin-Latour, 26 Rue Nicolas Chorier 38000 Grenoble.
Nicolas CHESNEY 3e , Loïc CHEVALLIER 4e , Guillaume LOMENECH 4e , Quentin MOUNIER 4e , Mathilde PICARD 4e , Gilles WEYMANN 5e ;
Collège Le Chamandier, 29 rue du Bois Taillis, 38610 Gières.

Enseignants :
M.CELLIER, M. LEBRUN, M. DUGAST

Chercheurs : Mme McLEAN, M. DUMAS

Qu'est-ce que le sudoku?

Le sudoku est un jeu.

Le 9×9 est le sudoku dit « classique ». On part d'une grille de 9 zones appelées régions, divisées en 9 cases. Le principe de ce jeu est de remplir la grille avec les chiffres de 1 à 9, chaque région, colonne et ligne contenant une seule fois chaque chiffre.

Notre sujet était de trouver le nombre exact ou approximatif de grilles de sudokus déjà remplies.

I/ Le 4×4

On part d'une grille de 4 zones appelées régions, divisées en 4 cases. Nous avons trouvé le nombre de possibilités pour remplir la première région, en plaçant les chiffres de 1 à 4 dans la première case, ce qui nous fait 4 possibilités pour la remplir; ensuite, nous sommes passés à la case n°2, où il n'y a plus que 3 possibilités; puis la case n°3 , où l'on a plus que deux chiffres, donc 2 possibilités; et enfin la case n°4 où il n'y a plus qu'un chiffre donc une seule possibilité: nous avons 4×3×2×1, appelé factoriel de 4, soit 24 possibilités.

Nous avons donc bloqué cette région pour compléter le reste de la grille. Nous avons rempli toutes les grilles à partir de la cette 1ere région. Nous avons remarqué qu'il y avait 12 grilles possibles. Cela c'est confirmé lors de nos essais suivants: Lorsque l'on remplit la 2eme région, les deux chiffres de la première ligne de la 1ere région passent sur la 2eme ligne de la 2eme région.

Dans les deux 1ères lignes de la figure 1a, on retrouve les chiffres dans leurs positions initiales: on a 4 grilles possibles.

Dans les deux 1ères lignes de la figure 1b, on remarque les chiffres ont été inversés (les 1 deviennent des 2 ; les 3 des 4 et vice versa): on a 4 grilles possibles.

Dans les deux 1ères lignes des figures 1c et 1d, seulement 1 doublet est inversé: on a 2 grilles possibles.

1	2	4	3
4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1

1	2	3	4
4	3	2	1
3	1	4	2
2	4	1	3

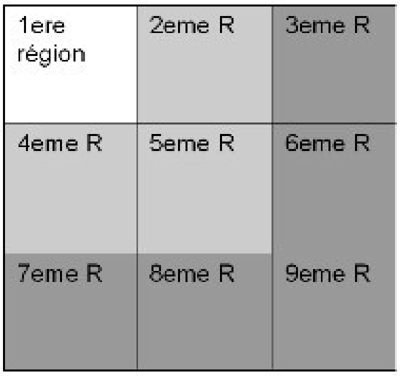
1	2	4	3
4	3	2	1
3	1		
2	4		

1	2	3	4
4	3	1	2
3	1		
2	4		

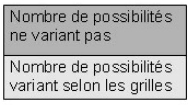
Sachant que si la première région est définie, il reste 12 possibilités de remplissage de grille; et qu'il y a 24 possibilités de remplissage de la région n°1, or 24x12 = 288, **il y a donc 288 possibilités de remplissage de grille 4×4.**

II/ Le 9×9:

Le système de numérotation est le même pour les cases et les régions. Il est indiqué figure 2.



1	2	3	6x	5x	4x			
4	5	6	[5-3]	[4-2]	[3-1]			
7	8	9	3x	2x	1x			
6x	[5-3]	3x	[6-3]	[5-2]	[4-1]			
5x	[4-3]	2x	[4-1]	[3-1]	[2-1]			
4x	[3-1]	1x	[3-1]	[2-1]	1x			



Dans la première région, on a neuf possibilités (1,2,3,4,5,6,7,8,9) pour la première case, puis plus que huit pour le seconde, sept pour la troisième,... Au final, on obtient 9×8×7×6×5×4×3×2×1, soit 9 ! ou 362.880 possibilités pour la première région du sudoku.

On a cherché un encadrement pour connaître un minorant

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
7	8	9	7	8	9

1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3

On a commencé par la région à côté (droite) de la région définie en tenant compte de la disposition dans celle-ci. On a cherché à savoir pourquoi on ne peut pas mettre 6 possibilités dans la case 4 (encadrement [5-3]) de cette région

L'estimation du nombre de possibilités totales trouvée est la suivante: entre $3{,}7 \times 10^{19}$ et 10^{30} possibilités.

On a calculé un minorant du l ($2{,}2\times10^{9}$) × un minorant du L (46656) × le nombre de possibilités de la 1ère région (9!).

Le minorant obtenu pour la grille 9×9 est d'environ $3{,}7\times 10^{19}$ possibilités

(mais en réalité il y a une erreur, nous nous sommes rendu compte que certaines grilles ne marchaient pas ce qui surestime le minorant trouvé). On renvoie à la méthode des symétries décrites ci-dessous pour un véritable calcul d'un minorant.

On calcule le majorant du l ($5{,}4\times10^{13}$)× le majorant du L ($5{,}2 \times 10^{10}$)x le nombre de possibilité pour la première région (9!)

Le majorant trouvé pour la grille 9×9 est environ de 10^{30} possibilités.

III/ Méthode des transformations

La méthode que nous avons utilisée est la suivante : nous avons commencé par remplir une grille de départ que nous avons appelée 123

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

Nous lui avons appliquée diverses transformations :

- Permutation de colonnes

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

avant

2	3	1	5	6	4	8	7	9
5	6	4	8	9	7	2	1	3
8	9	7	2	3	1	5	4	6
3	1	2	6	4	5	9	8	7
6	4	5	9	7	8	3	2	1
9	7	8	3	1	2	6	5	4
1	2	3	4	5	6	7	9	8
4	5	6	7	8	9	1	3	2
7	8	9	1	2	3	4	6	5

après

- Permutation de lignes

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

avant

4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
2	3	1	5	6	4	8	9	7
6	4	5	9	7	8	3	1	2
3	1	2	6	4	5	9	7	8
9	7	8	3	1	2	6	4	5

après

- Permutation de chiffres…
- Symétrie par rapport à la colonne centrale

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

avant

9	8	7	6	5	4	3	2	1
3	2	1	9	8	7	6	5	4
6	5	4	3	2	1	9	8	7
7	9	8	4	6	5	1	3	2
1	3	2	7	9	8	4	6	5
4	6	5	1	3	2	7	9	8
8	7	9	5	4	6	2	1	3
2	1	3	8	7	9	5	4	6
5	4	6	2	1	3	8	7	9

après

Cette méthode consiste à échanger les chiffres par rapport à un axe vertical (encadré ci-dessus en rouge).

On fait de même avec les :

- Symétrie horizontale

(avec un axe horizontal)

- Symétrie d'axe diagonal 1 (/)

(avec un axe diagonal)

- Symétrie d'axe diagonal 2 (\)

(avec le second axe diagonal)

Nous n'avons pas trouvé le nombre total de grilles de sudokus (environ $6{,}67 \times 10^{21}$ découvert par Bertram Felgenhauer et Frazer Jarvis). Nous avons donc cherché des nombres plus grands, des majorants, et des nombres plus petits, des minorants, pour l'encadrer.

IV/ Encadrement du nombre cherché

Ce dont nous sommes sûrs c'est qu'il y a moins de 9! puissance 9 possibilités pour remplir une grille de sudokus étant donné qu'il y a 9! possibilités pour remplir une région et qu'il y a 9 régions dans toute une grille, ces possibilités se multiplient entre elles. Mais ce nombre est un majorant car il faut aussi prendre en compte les contraintes du jeu de sudoku.

Le minorant, lui, est le total de toutes les possibilités trouvées en appliquant des transformations à une même grille fixe, la grille 123. Notre question est de savoir si nous devons additionner ou multiplier les nombres de grilles obtenues par ces transformations : en effet, les multiplier pourrait revenir à faire des doublons. Ce qui fausserait notre comptage de toutes les possibilités en partant d'une même grille...

V/ Permutations de colonnes

Dans la grille de sudoku 123, nous allons permuter des colonnes. Pour cela, nous n'allons jamais permuter des colonnes de différentes régions entre elles pour qu'il n'y ait pas d'interférence dans les régions. Nous n'allons également pas permuter toutes les colonnes en une seule fois sinon, cela pourrait revenir à une permutation de chiffres.

Pour calculer, on compte d'abord le nombre de permutations de colonnes dans chaque colonne de régions, on trouve 6 possibilités pour chaque colonne de régions donc 6 puissance 3 pour les 3 colonnes de régions.

Après, on soustrait à ce résultat le nombre de cas, dans chaque colonne de régions, où toutes les colonnes sont changées d'un coup (soit A, B, C, les noms de trois colonnes d'une même colonne de régions, les combinaisons pour lesquelles toutes les colonnes bougent sont BCA et CAB) ce qui nous donne 2 pour chaque colonne de régions donc 2 puissance 3 pour les 3 colonnes de régions.

On fait donc:

(6 puissance 3) - (2 puissance 3) = 216 – 8 = 208 permutations de colonnes possibles.

Puis, on multiplie le nombre de permutations de colonnes avec le nombre de permutations de lignes ce qui nous donne:

208 puissance 2 = 43264 possibilités.

VI/ Permutations de chiffres

Nous avons essayé de faire des permutations de chiffres, c'est-à-dire remplacer un chiffre par un autre chiffre dans toute la grille. Par exemple, changer tous les 1 en 2, tous les 2 en 3, tous les 3 en 4,... tous les 9 en 1.

On le notera ainsi:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 3 4 5 6 7 8 9 1

Sur une grille :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

Remarque : on peut laisser un ou plusieurs chiffres fixes.

Par exemple :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 3 4 5 6 7 8 1 9

Ici, on a laissé fixes les 9.

Nous avons ensuite calculé le nombre de permutations de chiffres possibles. Dans une même grille:

2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	2	6	7	5	9	1	8
6	7	5	9	1	8	3	4	2
9	1	8	3	4	2	6	7	5
4	2	3	7	5	6	1	8	9
7	5	6	1	8	9	4	2	3
1	8	9	4	2	3	7	5	6

- On peut changer (ou garder) les 1 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, soit 9 possibilités.
- On peut changer (ou garder) les 2 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, soit 9 possibilités – 1 possibilité déjà utilisée lorsqu'on a changé les 1.
- On peut changer (ou garder) les 3 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, soit 9 possibilités – 2 possibilités déjà utilisées lorsqu'on a changé les 1 et les 2.
- […]
- On peut changer (ou garder) les 9 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, soit 9 possibilités – 8 possibilités déjà utilisées lorsqu'on a changé les 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

Le nombre total de permutations de chiffres s'élève donc à

$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités, soit 9! c'est-à-dire 362 880.

VII/ Minorant (méthode des transformations)

Notre minorant est donc égal à :

$362.880 \times 43264 \times 5 = 78.498.201.600$, soit environ $7,8 \times 10^{10}$